EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO A PARTIR DE LA PARTICULARIZACIÓN Y SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL THINKING FROM PARTICULARIZATION AND PROBLEM SOLVING

Ana Elizabeth González González[1]
William Reinaldo González González[2]

Recepción:: 04/05/2022
Aceptación: :28/06/2022
Artículo de investigación

Resumen

Este artículo tiene como objetivo realizar aportes a la caracterización del desarrollo del pensamiento matemático a partir de problemas en clase de matemáticas. La investigación tiene un enfoque cualitativo, bajo el diseño de investigación-acción con el uso de instrumentos como la observación participativa, cuestionario de pregunta abierta y la aplicación de un sistema de actividades a estudiantes de educación básica. Los resultados demuestran que cuando el docente enfrenta un grupo de estudiantes a la construcción propia de una generalización en matemáticas a partir

1 Magister en Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño, sede Bogotá, Candidata a Doctora en Educación Matemática Universidad Antonio Nariño, docente Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia - Tunja - Boyacá, Grupo de investigación: EDUMAES y proyecto asociado: Resolución de problemas código SGI 2443, E-mail: anaelizabet.gonzalez@uptc.edu.co

2 Estudiante Maestría en Educación Matemática, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia - Tunja - Boyacá, E-mail: reyngogo@gmail.com

de problemas, estos responden de manera eficaz, reflexionando sobre la experiencia acumulada en intentos fallidos y acertados. Lo anterior evidencia que el razonamiento matemático puede mejorarse con la práctica unida a la reflexión, permitiendo al docente aprovechar ambientes en los que las preguntas, contradicciones, tensiones y sorpresas enriquecen su práctica y se convierten en elementos esenciales que cambian la forma de ver y sentir las matemáticas en sus estudiantes.

***Palabras claves*:** Pensamiento matemático, particularización, generalización, resolución de problemas.

Abstract

This article aims to make contributions to the characterization of the development of mathematical thinking from problems in mathematics class. The research has a qualitative approach, under the action-research design with the use of instruments such as participatory observation, open question questionnaire and the application of a system of activities to basic education students. The results show that when the teacher confronts a group of students with their own construction of a generalization in mathematics from problems, they respond effectively, reflecting on the experience accumulated in failed and successful attempts. The foregoing shows that mathematical reasoning can be improved with practice combined with reflection, allowing teachers to take advantage of environments in which questions, contradictions, tensions and surprises enrich their practice and become essential elements that change the way the students see and feel Mathematics.

Key words: Mathematical thinking, particularization, generalization, problem solving.

Introducción

Fonseca (2016) afirma que "el desarrollo del pensamiento matemático ha venido adquiriendo especial interés en la comunidad académica por su función en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y en los profesores por su inclusión en la conceptualización de competencias matemáticas" (p. 52). Sin embargo, resultados obtenidos en pruebas nacionales como Saber, con las cuales el estado examina la calidad de la educación en diferentes niveles debaten que la escuela no favorece el desarrollo del pensamiento matemático (MEN, 2017).

Esto podría deberse a los enfoques tradicionales de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, que aún prevalecen en muchas escuelas, ocupándose de promover la asimilación y repetición de conceptos, la realización de un procedimiento eficiente y pulcro de algoritmos inmutables del conocimiento carentes de sentido por parte de los estudiantes. Al respecto, Martínez (2013) afirma que "saber realizar algoritmos es indispensable, pero para solucionar problemas, competencia básica de la matemática escolar, se requiere la habilidad para utilizar nociones y representaciones que están estrechamente interconectados" (p. 13). Los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Técnica López Quevedo presentan dificultad en esta habilidad, lo cual les impide llegar a una generalización.

Es importante propiciar el proceso de generalización en los estudiantes, ya que este es la suma de reconocer y dominar diferentes habilidades, propiedades matemáticas y patrones (aritméticos y geométricos) a lo largo de situaciones particulares.

En este sentido, esta investigación con enfoque cualitativo, bajo el diseño de investigación-acción tiene por objetivo realizar aportes a la caracterización del desarrollo del pensamiento matemático a partir de problemas que permitan llevar a un estudiante del proceso de particularización al de generalización. Se toma como referente lo planteado por Mason, Burton, & Stacey (1982), quienes realizan una propuesta metodológica basada en la resolución de problemas para desarrollar este tipo de pensamiento matemático a partir de su sistematización, análisis y reflexión.

Marco Teórico

El Desarrollo Del Pensamiento Matemático

Según el Ministerio de Educación de Singapur (2007) cuando el estudiante es atraído por una situación que le parece interesante, se integran competencias, habilidades de pensamiento, conceptos y procesos matemáticos que le permiten dinamizar el pensamiento matemático. De esta manera, el reto del docente es plantear buenos problemas.

En este sentido, Falk (2021) expresa, "la idea es que un buen problema nos conduce a diseccionar las ideas matemáticas y recomponerlas de manera innovadora" (p. 15). Si el estudiante logra realizar este proceso puede evidenciarse la creatividad, el ingenio y lo razonable de su solución, lo que constituye un pensamiento de alto nivel.

Por su parte, Mason et al. (1982) asumen el pensamiento matemático como “un proceso dinámico que permite el aumento de la complejidad de las ideas que podemos manejar extendiendo nuestra capacidad de comprensión” (p.167). Para ello, han identificado tres fases en todo proceso de resolución de problemas de matemáticas. Gómez (2009) especifica cada una de estas fases de la siguiente manera:

Fase de abordaje: tiene que ver en formular el problema de forma precisa y decidir exactamente qué es lo que se quiere hacer. Fase de Ataque: está determinada cuando se siente que el problema se ha instalado dentro de la mente y es propiedad del individuo. Fase de Revisión: momento en que se da una mirada retrospectiva para mejorar y ampliar la capacidad de razonamiento e intentar situar la resolución en un marco más general. (p. 3)

Por lo anterior, esta investigación tiene en cuenta la propuesta metodológica de Mason, Burton, & Stacey (1982) en la resolución de problemas como una de las herramientas y vías para desarrollar y caracterizar el pensamiento matemático de los estudiantes, a medida que van experimentando las fases.

No cabe duda de la importancia de los problemas dentro del desarrollo del pensamiento matemático. Por ende, es necesario abordar qué se entiende por estos y por supuesto los autores que sustentan estas ideas. A continuación, se muestran los aspectos anteriormente mencionados, así como la definición acogida para esta investigación.

La Resolución De Problemas

Takahashi (2007) establece que, “una de las formas de brindar a los estudiantes la oportunidad de adquirir no solo conocimientos y habilidades, sino también pensamiento matemático es enseñar matemáticas a través de la resolución de problemas” (p. 2), porque solo esta actividad matemática propicia que las preguntas conduzcan a los estudiantes a hacer conjeturas, plantear problemas y buscar abstracciones y generalizaciones.

Al respecto Kleiner (1986) enfatiza que el desarrollo de conceptos y teorías matemáticas se originan a partir de un esfuerzo por resolver un determinado problema. De esta manera, la resolución de problemas se convierte en una parte fundamental al momento de desarrollar y caracterizar el pensamiento matemático.

Schoenfeld (2020) señala lo siguiente:

Un atributo de un buen problema es aquel que abre caminos para conjeturas, para hacer conexiones, para abstraer, generalizar y para nuevos problemas… porque la forma en que se construye la matemática es mediante la búsqueda constante de ampliar lo que sabemos a través de generalizaciones, abstracciones y la búsqueda de cuestiones de estructura. (p. 1170)

En este sentido, el reto del docente está en plantear buenos problemas en los cuales los estudiantes desarrollen una comprensión y aplicación profunda de los conceptos matemáticos, a la vez que dan sentido a ideas matemáticas interconectadas, válidas y aplicables.

Al respecto, Polya (1965) expresa que tener un problema es “ buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata” (p. 117). Por su parte Krulik & Rudnik (1988) definen problema como “una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma” (p. 11).

Esta investigación acoge los problemas matemáticos no rutinarios. Para Selden et al. (1999), “son tareas cognitivamente no triviales” (p. 3), en las que el estudiante se enfrenta sin conocer la vía de solución. También, Pérez (2004) ratifica que “los problemas retadores que invitan al estudiante a pensar autónomamente, a indagar, a cuestionar, a razonar y a explicar su razonamiento” (p. 1). Estos problemas son muy interesantes porque promueven la reflexión, la búsqueda de datos relevantes, estrategias y técnicas satisfactorias de solución y la limitación de las posibles soluciones.

Metodología

Esta investigación presenta un enfoque cualitativo y según Sampieri et al. (2014), su finalidad radica en “describir, comprender e interpretar los fenómenos, a través de las percepciones y significados producidos por las experiencias de los participantes” (p. 11). Se adopta la investigación-acción en virtud de lo expuesto por Sandín (2003), ya que este diseño pretende “propiciar el cambio social, transformar la realidad y que las personas tomen conciencia de su papel en ese proceso de transformación” (p. 161).

La investigación se realiza en Jericó (Boyacá) y cuenta con la participación de un grupo de grado noveno y el docente. Este último se introduce en el entorno escolar y con instrumentos como el cuestionario de pregunta abierta, la observación participante, el diario de campo y la grabación de audio de las sesiones de clase, propicia y caracteriza el desarrollo del pensamiento matemático de los grupos focales conformados por estudiantes.

Una vez recolectados los datos, se procede a describir y analizar el pensamiento matemático desarrollado a partir de los problemas dados. A continuación, se caracterizan las concepciones que manifiestan los estudiantes al resolver las actividades planteadas.

Resultados y Discusión

Ahora, se presentan las actividades que pretenden propiciar y desarrollar el pensamiento matemático junto con las respuestas de los estudiantes. El propósito es que a partir de la siguientes fases ellos puedan construir la fórmula o generalización que da solución al siguiente problema: ¿cuántas diagonales tiene un polígono regular de n lados?

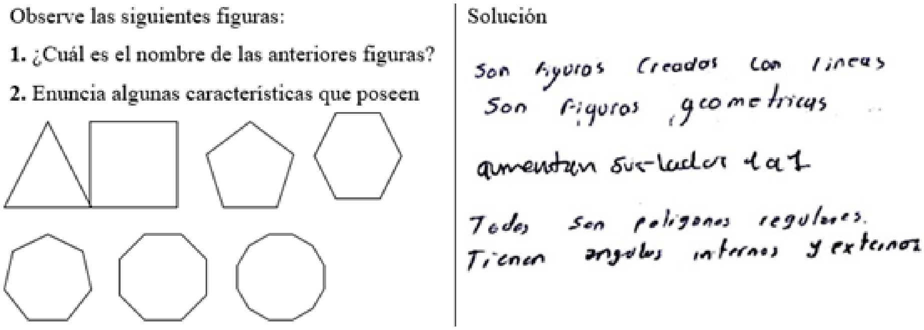
El abordaje y la particularización

Se comienza por plantear diferentes polígonos con el propósito de familiarizar al estudiante con el problema. La idea es que realice planteamientos, vislumbre caminos de solución a medida que va aumentando el nivel de complejidad y, de esta manera, encaminarlo en la fase de abordaje. Esta primera actividad reflexiva, fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático, permite apartarse un poco de los detalles del cálculo y analizar la forma en que se interpretan los distintos objetos matemáticos del problema. Para suplir esta necesidad, se plantea una primera actividad que se puede ver en la Figura 1.

Durante el proceso de socialización se evidencia que un 73% de los estudiantes realiza observaciones de carácter visual, mientras que el porcentaje restante logra reconocer, con el uso del lenguaje matemático, los nombres, características y propiedades de algunas de las figuras geométricas, como se puede evidenciar en la Figura 1. El docente orienta y anima a los estudiantes en la búsqueda de argumentos que sean validados por sus pares.

Figura 1

Abordaje, socialización y validación de apreciaciones grupales.



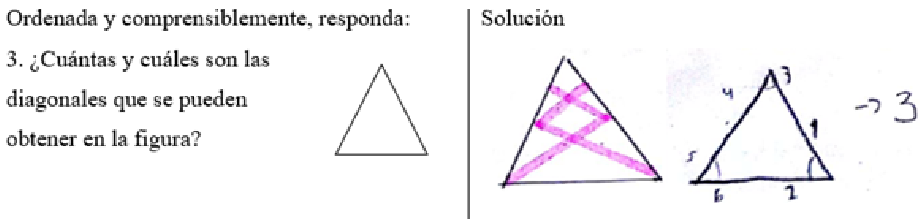
Fuente: el autor

Hay procesos concretos que ayudan al razonamiento matemático, en este caso Mason et al. (1982) señala que la particularización "consiste simplemente en concentrar la atención en algunos ejemplos para entender mejor el significado de la pregunta y descubrir ambigüedades" (p. 20). Por lo tanto, se propone la actividad expuesta en la Figura 2, cuyo propósito es identificar algunos conceptos trascendentales para el ejercicio, como lo es el de diagonal.

Este nuevo acercamiento al ejercicio consigue identificar una intuición primaria en el estudiante, según Fischbein (1975) la adquisición cognitiva proviene del conocimiento y de la habilidad que se tenga frente a un tema.

Figura 2

Descubriendo ambigüedades en el inicio del proceso de particularización.

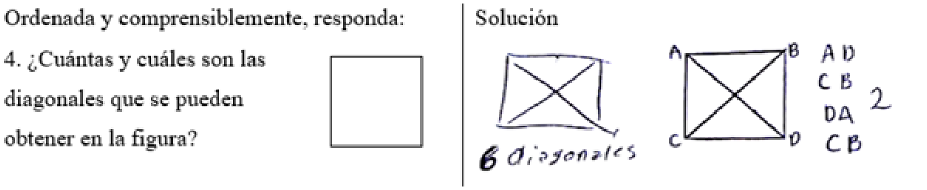


Fuente: el autor

Al encontrar dicha intuición, y sin despejar la duda que aqueja a todos los estudiantes, el docente plantea un nuevo problema como se evidencia en la Figura 3, ya que Mason et al. (1982) proponen que nuevas y cuidadosas particularizaciones, con la vista puesta más bien en el por qué que en el qué, pueden conducir a una intuición clara de lo que está ocurriendo realmente (p. 17). Este proceso contribuye a cambiar y formalizar la intuición que se tiene del concepto de diagonal.

Figura 3

Respuesta de estudiantes a la actividad 4. Aclarando ambigüedades a partir de nuevas particularizaciones.


Ordenada y comprensiblemente, responda:

4. ¿Cuántas y cuáles son las diagonales que se pueden obtener en la figura?

Solución

Fuente: el autor

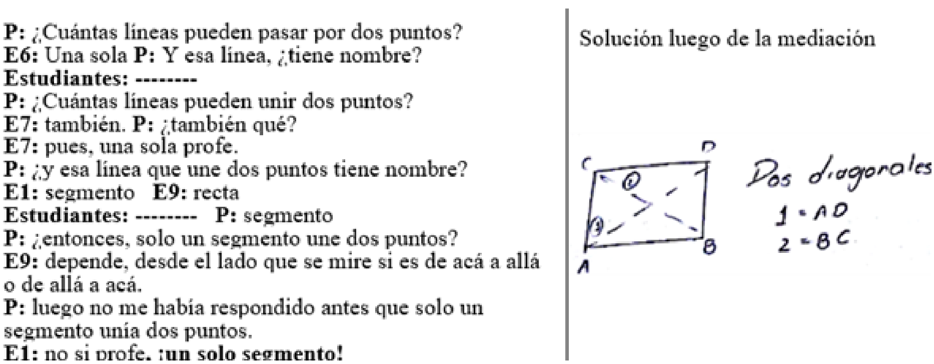
Los estudiantes en este nuevo desarrollo a partir de los trazos aclaran, individualmente, algunas características propias de la diagonal. Sin embargo, aún siguen considerando los lados de las figuras al contar las posibles diagonales.

Escuchando las diferentes respuestas y observando los nuevos trazos de los estudiantes en la Figura 3, el docente cuestiona la definición de diagonal, obteniendo las siguientes respuestas: es algo oblicuo, no es horizontal ni vertical**,** es una línea que puede tener dos direcciones. Frente a estas respuestas, se origina un diálogo entre docente y estudiantes tal como se puede ver en la Figura 4, en la cual preguntas heurísticas encaminan al estudiante a clarificar la definición de diagonal (E significa estudiante. P significa profesor)

Tras esta conversación, los estudiantes nuevamente desarrollan el problema planteado anteriormente y revelan respuestas como se observa en la solución de la Figura 4.

Figura 4

Mediación para la construcción del concepto de diagonal y su resultado.


P: ¿Cuántas líneas pueden pasar por dos puntos?
E6: Una sola **P:** Y esa línea, ¿tiene nombre?
Estudiantes: --------
P: ¿Cuántas líneas pueden unir dos puntos?
E7: también. **P:** ¿también qué?
E7: pues, una sola profe.
P: ¿y esa línea que une dos puntos tiene nombre?
E1: segmento **E9:** recta
Estudiantes: -------- **P:** segmento
P: ¿entonces, solo un segmento une dos puntos?
E9: depende, desde el lado que se mire si es de acá a allá o de allá a acá.
P: luego no me había respondido antes que solo un segmento unía dos puntos.
E1: no si profe. **¡un solo segmento!**

Solución luego de la mediación

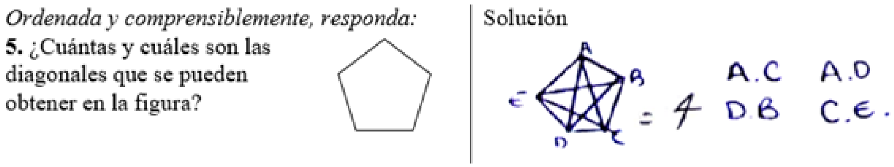
Fuente: el autor

Es importante notar que el estudiante introduce el uso de símbolos que le permiten elaborar posibles respuestas y representar el razonamiento de una manera concisa, dando respuesta al interrogante ¿qué puedo usar? En ese sentido Mason et al. (1982) afirman que "explorar la capacidad de los símbolos no resulta sencillo, como la gente suele creer, sino que depende de que los símbolos se conviertan en algo tan familiar y significativo como los números a los que sustituyen" (p. 21). Teniendo un poco más claro el camino por seguir y aumentando el nivel de complejidad en las particularizaciones presentadas, se plantea un nuevo problema.

Los estudiantes responden explorando la capacidad de lo que Mason et al. (1982) llaman "lo que sé" (p.40) para este caso: debo trazar líneas que unan dos puntos no consecutivos, y contar cada línea como una y solo una ,es decir, trazar diagonales dentro de polígonos regulares, tal como se evidencia en la Figura 5.

Figura 5

Verificando el cierre de la fase de abordaje.



Fuente: el autor

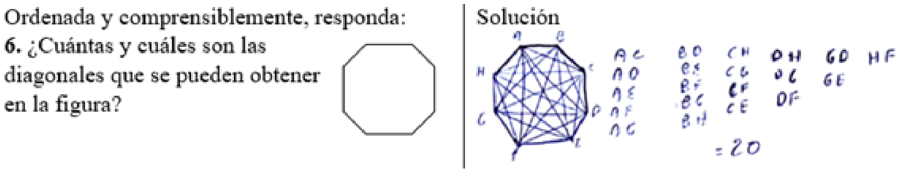
Así mismo, se tiene una idea más clara de lo que quiero: hallar el número de diagonales de cualquier polígono de n lados. Según Mason et al. (1982) "El razonamiento entra en la fase de ataque cuando se siente que el problema ya se ha instalado en la mente del estudiante y ya es suyo" (p. 49).

Ataque

Se presentan nuevas particularizaciones con las cuales los estudiantes empiezan a dilucidar nuevas conjeturas. Durante esta fase, pueden ensayarse enfoques y planes para su solución. El problema condujo a realizar un listado organizado de las diagonales que se pueden obtener a partir de un punto que el estudiante propone, y, en su orden, consigue ver que a partir de determinado vértice el número de diagonales empieza a disminuir (ver Figura 6).

Figura 6

Vislumbrando caminos de solución tras realizar listados de diagonales.



Fuente: el autor

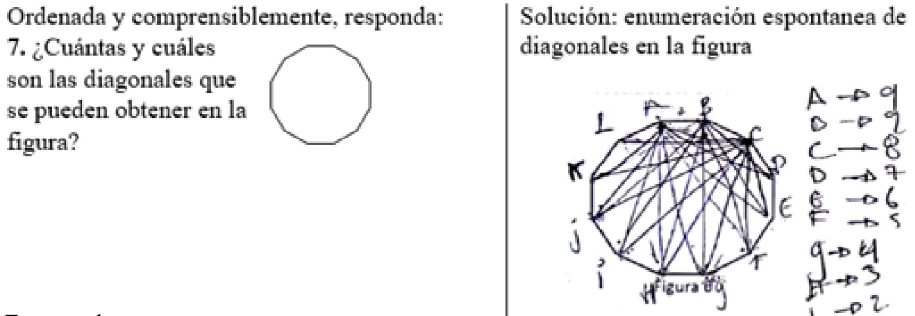
Los razonamientos expresados por los estudiantes y el manejo las diagonales, así como los símbolos que las representan, demuestran una sensación de seguridad en el estudiante. Este es uno de los momentos claves, ya que a partir de ideas y de procesos de reflexión, el proceso de particularización ahora es utilizado por el estudiante como evidencia necesaria para el proceso de generalización. Ahora, el énfasis se desplaza a intentar averiguar qué puede ser verdadero y por qué.

A la hora de presentar un nuevo problema con un grado de dificultad mayor con respecto a los trazos por realizar y al conteo de las posibles diagonales, el estudiante experimenta espacios de tensión mirando alucinado el problema, estas sensaciones son clasificadas por Mason et al. (1982) propias de esta fase y asociadas a los estados de ánimo: ¡atascado! y ¡ajá! (p. 29). El docente, posibilita espacios en los que se expresen tales sensaciones y, poco a poco, los estudiantes logran distanciarse de ese estado de atasco.

Recordando las acciones que pueden llevar a cabo, los estudiantes tratan de encontrar otras maneras posibles de hacer los cálculos, hasta dar con una representación que muestre claramente por qué el resultado puede valer en todos los casos. Se evidencia la adquisición del hábito de tomar notas para su propio uso mientras intenta resolver y dar respuesta de manera general a los problemas. En este caso, a partir de la experiencia, los estudiantes realizan listados sistemáticos de las posibles diagonales que pueden obtener. Para comprender lo anterior se puede observar la Figura 7.

Figura 7

Momento de realizar conjeturas.



Fuente: el autor

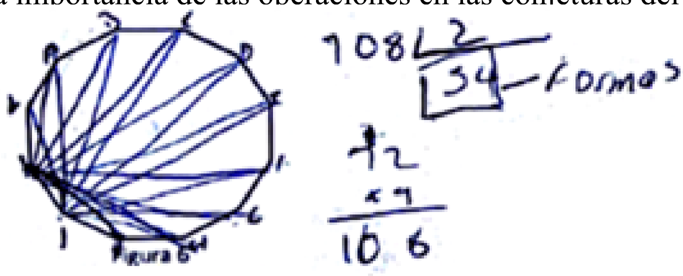
Allí, el docente le resalta al estudiante que debe ser cuidadoso ante el primer esquema o ley general que detecte y procurar comprobarlo con ejemplos variados o con otras particularizaciones. Al expresar el esquema general que se ha llegado a intuir, el estudiante va produciendo conjeturas, que nuevas o anteriores particularizaciones pueden derribar.

Revisión

Este es el momento en que el estudiante reflexiona y retrospectivamente revisa el trabajo realizado, se observa que siente la necesidad de ampliar su capacidad de razonamiento y busca una solución en un contexto más amplio, más general. Es el tiempo de buscar una razón general, para comprobar que el esquema es válido. En la Figura 8, el estudiante encuentra nuevas ideas de solución, deja incompletos los trazos dentro de la figura, da paso a los cálculos operacionales para mejorar su solución e intenta generalizarla para resolver nuevos problemas. Aún sin estar bien planteados, van apareciendo de manera natural y propia en la mente de cada uno.

Figura 8

La importancia de las operaciones en las conjeturas del estudiante.



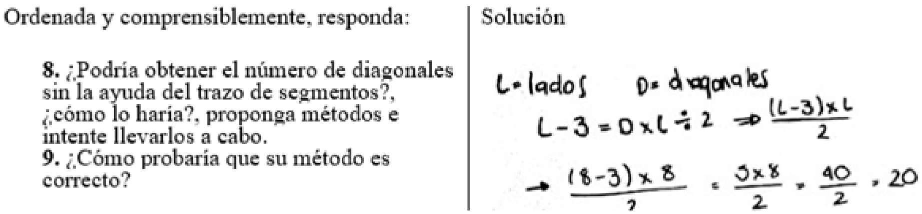
Fuente: el autor

Intentando culminar y construir una formula general, se plantea a los estudiantes un nuevo problema. Se brinda un espacio para que revisen y construyan posibles generalizaciones, encontrando que efectivamente desarrollaban una estrategia similar, a lo que ellos respondieron que la idea clave había sido el conteo inicial de las diagonales dentro de cada una de las figuras. Se dieron cuenta de regularidades como lo menciona E2: El primer y segundo punto siempre tenían el mismo número de diagonales, de allí en adelante empezaban a disminuir, por eso se me ocurrió aplicar una resta.

Es así como los estudiantes llegan a la generalización presentada en la Figura 9, la cual es revisada por cada uno de ellos en las diferentes particularizaciones realizadas, dando un nuevo aspecto al problema y ubicando la solución en un contexto más amplio.

Figura 9

Generalización y revisión de los estudiantes.



Ordenada y comprensiblemente, responda:

8. ¿Podría obtener el número de diagonales sin la ayuda del trazo de segmentos?, ¿cómo lo haría?, proponga métodos e intente llevarlos a cabo.
9. ¿Cómo probaría que su método es correcto?

Solución

L= lados D= diagonales

$L-3 = D \times L \div 2 \Rightarrow \frac{(L-3)\times L}{2}$

$\rightarrow \frac{(8-3)\times 8}{2} = \frac{5\times 8}{2} = \frac{40}{2} = 20$

Fuente: el autor

Conclusiones

Los resultados muestran que, para propiciar el desarrollo del pensamiento matemático, se debe promover un rol activo en el estudiante y, así, careciendo de una serie de pasos se sienta en la necesidad de movilizar estrategias en la búsqueda de la generalización a la solución de un problema.

Para generalizar las estrategias correctas y descartar las incorrectas, se debe procurar no solo el acompañamiento por parte del docente y sus preguntas heurísticas, sino también el de nuevos problemas que permitan particularizar. Los casos concretos permiten abrir el camino e introducir el tema, captando mejor el significado del mismo y los casos más complejos permiten hacer conjeturas más argumentadas, dando allí comienzo al proceso de la generalización.

A medida que aumenta la complejidad de la particularización de un problema, el estudiante experimenta la necesidad de abandonar las estrategias gráficas o de conteo y procede a la búsqueda de leyes o algoritmos que generalicen su solución, convirtiendo esta metodología en una herramienta flexible y sistemática que da sentido a los objetos matemáticos inmersos en el pensamiento matemático.

Referencias

Alvarado, S. R., Rugeles, L. P., Zehr, J. G., Martínez, S. T., de Manzanilla, Y. B., Rivera, J. J., & Alvarado, D. D. (2022). Implementación de un plan piloto virtual de formación para jóvenes líderes comunitarios. South Florida Journal of Development, 3(4), 4479-4487.

Falk, M. (2021). Tres aspectos del desarrollo del pensamiento matemático por medio de la solución de problemas. Seminario III. Pensamiento matemático y educación matemática. Bogota.

Fischbein, E. (1975). The intuitive sources of probability thinking in children. Dordrecht: Reidel.

Fonseca, J. (2016). Elementos para el desarrollo del pensamiento matemático en la escuela. Encuentro Distrital de Educación Matemática EDEM, 3, 51-58. Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/9874/1/Fonseca2016Elementos.pdf

Gómez, J. (2009). La resolución de problemas en el pensamiento matemático avanzado: el caso de la elaboración de significados de la definición de espacio topológico. Funes.uniandes. Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/724/1/laresolucion.pdf

Kleiner, I. (1986). Famous Problem in Mathematics: An Outline of a Course. For the Learning of Mathematics, 6(1), 31-38.

Krulik, S., & Rudnik, J. (1988). Problem solving: a handbook for teachers. Boston: Allyn and Bacon.

Martínez, G. (2013). Construcción de objeto virtual de aprendizaje para adquisicion de estrategias en técnicas de Conteo. Bogotá. Obtenido de https://1library.co/document/y93d5wry-construccion-objeto-virtual-aprendizaje-adquisicion-estrategias-tecnicas-conteo.html

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). Pensar matemáticamente. Barcelona: Labor S. A.

MEN. (2017). Obtenido de Ministerio de Educación Nacional: https://diae.mineducacion.gov.co/dia_e/documentos/2017/115087000208.pdf

Perez, J. (2004). Olimpiadas colombianas de matemáticas para primaria.

Polya, G. (1965). Mathematical Discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving. New York: John Wiley & Sons Combined Edition.

Sampieri, R., Fernández, C., & Baptista, L. (2014). Definiciones de los enfoques cuantitativo y cualitativo, sus similitudes y diferencias. En R. Sampieri, Metodología de la Investivación (pág. 11).

Sandín, M. (2003). La enseñanza de la investigación cualitativa. Revista de Enseñanza Universitaria, 21, 37-52.

Schoenfeld, A. (2020). Mathematical practices, in theory and practice. ZDM. 52. 10.1007/s11858-020-01162-w.

Selden, A., Selden, J., Hauk, S., & Mason, A. (1999). Do Calculus Students Eventually Learn to Solve Non-Routine Problems? Technical Report. Tennessee Technical University, 5, 1-20. Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/238700485_Technical_Report_Do_Calculus_Students_Eventually_Learn_to_Solve_Non-routine_Problems/citation/download

Takahashi, A. (2007). Planning a lesson for students to develop mathematical thinking through problem solving. DePaul University.

The Ministry of Education Singapore. (2007). Mathematics Syllabus Primary. Obtenido de http://ncm.gu.se/media/kursplaner/andralander/singaporegrund.pdf