



ANÁLISIS DE UN INSTRUMENTO PARA PROYECTAR CARACTERÍSTICAS DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA – CASO DE LAS ISOMETRÍAS

ANALYSIS OF AN INSTRUMENT TO PROJECT CHARACTERISTICS OF A DIDACTIC SEQUENCE – CASE OF ISOMETRIES

*Milton Alfonso Farias Avila¹
Yetza Ximena Díaz Pinzón²*

Recepción: 03/05/2022
Aceptación: 07/06/2022
Artículo de reflexión

Resumen

Reflexionando sobre las dificultades que se presentan tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de los aspectos relacionados con el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, específicamente en el tema de las transformaciones isométricas, surgió la inquietud de investigar ¿Qué características debe tener un dispositivo didáctico para orientar la enseñanza y el aprendizaje de las isometrías? Como punto de

-
- 1 Licenciado en Matemáticas y estudiante de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC), Colombia, correo electrónico: milton.farias@uptc.edu.co.
 - 2 Licenciada en Matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC), Magister en enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia, Doctorando en Enseñanza de las Ciencias de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN), correo: yetza.diaz@uptc.edu.co.



partida se diseñó una prueba diagnóstica cuyo objetivo fue determinar los conceptos, las ideas y las relaciones que tienen los estudiantes con respecto a las construcciones geométricas basadas en transformaciones isométricas de formas poligonales y poliédricas. Este artículo presenta tanto el análisis de resultados de la aplicación de dicha prueba a un grupo de veintinueve estudiantes de noveno grado, como las proyecciones para diseñar una secuencia didáctica que dinamice el modelo de Van Hiele para dar soluciones descriptivas e instructivas para la comprensión de los tópicos geométricos considerados.

Palabras claves: Modelo de Van Hiele, Transformaciones Isométricas, Pensamiento Espacial.

Abstract

Reflecting on the difficulties that arise both in the teaching and in the learning of aspects related to spatial thinking and geometric systems, specifically in the subject of isometric transformations, the concern prompted to investigate: What characteristics should a didactic device have? to guide the teaching and learning of isometrics? As a starting point, a diagnostic test was designed whose objective was to determine the concepts, ideas and relationships that students have with respect to geometric constructions based on isometric transformations of polygonal and polyhedral shapes. This article presents both the analysis of the results of the application of said test to a group of twenty-nine ninth grade students, as well as the projections to design a didactic sequence that dynamizes the Van Hiele model to give descriptive and instructive solutions for the understanding of the geometric topics considered.

Key words: Van Hiele Model, Isometric Transformations, Spatial Thinking

Introducción

El pensamiento espacial y los sistemas geométricos formulados en los Lineamientos Curriculares, los Estándares Básicos por Competencias y los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), se establecen como un proceso transversal en los que el estudiante no debe saber solamente definiciones o teoremas, sino que debe reconocer las reglas y aplicarlas en diferentes situaciones o espacios, (MEN, s.f.). Además, debe ser un proceso de construcción en el que estudiante analice, pruebe y construya modelos que le permitan concluir o construir nuevos conceptos o saberes.



Los Estándares Básicos por Competencias (MEN, 2006) y los Derechos básicos de Aprendizaje (MEN, 2016) presentan el pensamiento y espacial y los sistemas geométricos como parte fundamental de los procesos de aprendizaje de las matemáticas, al ser transversales con los otros cuatro pensamientos, expanden el espectro conceptual, En este caso particular se hace referencia al estudio de las transformaciones isométricas en grado noveno.

El problema de investigación surgió de situaciones tradicionales de aula, como lo afirman Monge & Vallejos (2012) “En la mayoría de las instituciones educativas de nuestro país, la enseñanza de la matemática se da de forma magistral, el profesor explica la materia, realiza ejemplos y los estudiantes hacen ejercicios, hasta lograr el resultado.”. Al respecto (Leguizamón et al., 2015) expresan que:

Estas situaciones provienen posiblemente de las creencias que tiene el profesor acerca de la naturaleza de las matemáticas, uno de los factores que condiciona su pensar y actuar en el aula y con el que construye el marco dentro del cual utiliza los recursos, las estrategias cognitivas y metacognitivas al trabajar las diferentes temáticas matemáticas. (p.152)

Para el desarrollo de la investigación se retomaron planteamientos del trabajo realizado por Farias, (2017) y observando las dificultades específicas con la enseñanza y aprendizaje de las transformaciones isométricas se planteó la pregunta: ¿Qué características debe tener un dispositivo didáctico para la enseñanza de las isometrías?

Para responder a esta cuestión se partió del diseño de una prueba diagnóstica cuyas actividades se fundamentaron en las características de los niveles de razonamiento propuestos pro Van Hiele y caracterizados por Jaime Pastor, (1993) de la siguiente manera

Nivel 1. Reconocimiento: en el cual la descripción de las figuras se restringe principalmente a su aspecto físico y a su posición en el espacio.

Nivel 2. Análisis: en este nivel los individuos deben poder describir las partes que integran una figura y enunciar sus propiedades.

Nivel 3. Clasificación: alcanzarlo requiere comprensión de lo que es una definición matemática y sus requisitos.

Nivel 4. Deducción Formal: en este punto el individuo debe estar en capacidad de comprender y desarrollar demostraciones formales.

Nivel 5. Rigor: es el nivel más avanzado de la propuesta y estar en él requiere capacidad para realizar deducciones abstractas basándose en un sistema de axiomas determinado.



Figura 1

Niveles y fases del Modelo de Van Hiele, (Díaz, s.f)

	ASPECTO INSTRUCTIVO CINCO FASES PROFESORES	ASPECTO DESCRIPTIVO CINCO NIVELES APRENDICES	ASPECTO INSTRUCTIVO CINCO FASES PROFESORES	EVALUACIÓN
MODELO DE RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO VAN HEILE	1. Recursividad	Nivel 1. Reconocimiento o visualización	Fase 1: Información.	1. Del área de las matemáticas tratada depende el nivel del estudiante.
	2. Secuencialidad	Nivel 2. Análisis	Fase 2: Orientación dirigida.	2. Debe evaluarse el cómo y el porqué de las respuestas de los estudiantes.
	3. Especificidad del lenguaje	Nivel 3. Deducción informal u orden	Fase 3: Explicación.	3. El nivel de los estudiantes lo develan las respuestas, no las preguntas.
	4. Continuidad	Nivel 4. Deducción	Fase 4: Orientación libre.	4. El nivel de los estudiantes es relativo al contenido.
	5. Localidad	Nivel 5. Rigor	Fase 5: Integración.	5. La transición entre un nivel y otro dificulta establecer la condición real del estudiante.

Principales componentes del Modelo de razonamiento geométrico Van Hiele

Nota. El modelo Van Hiele es un modelo de razonamiento geométrico estructurado a partir de aspectos instructivos, que permiten al docente orientar la progresión de los cinco niveles y un aspecto descriptivo que permite a los estudiantes progresar en los niveles, superando cinco fases en cada uno de ellos.

Reflexión

Se planteó una prueba diagnóstica, que contiene siete actividades formuladas desde las características de los niveles del modelo Van Hiele.

Tabla 1 Niveles de Van Hiele vs Actividades

Nivel	Actividades
Nivel 1. Reconocimiento.	2
Nivel 2. Análisis.	1
Nivel 3. Clasificación.	3, 4, 6
Nivel 4. Deducción Formal.	5
Nivel 5. Rigor.	7

Nota 1 La tabla relaciona las actividades de la prueba diagnóstica con los niveles de razonamiento de Van Hiele

La prueba fue presentada de manera presencial, los resultados se sistematizaron usando el software SPSS, atendiendo a las distintas resoluciones de la tarea de los alumnos. También se categorizaron las explicaciones escritas de los alumnos y las anotaciones sobre los diálogos mantenidos durante la realización de la actividad.



El análisis de la prueba diagnóstica se desarrolló desde un paradigma de investigación mixta definido por Hernández Sampieri et al., (2014), “como un proceso que recolecta, analiza y vincula datos cuantitativos y cualitativos en un mismo estudio o una serie de investigaciones para responder a un planteamiento del problema obteniendo resultados tanto de forma como de fondo más críticos y precisos”.

Se ha acudido al enfoque exploratorio, con un grupo de 29 estudiantes de una institución educativa de la ciudad de Tunja (Boyacá) y el objetivo de la prueba fue determinar los conceptos, las ideas y las relaciones que tienen los estudiantes con respecto a las construcciones geométricas basadas en transformaciones isométricas de formas poligonales y poliédricas. Esto como preámbulo del diseño de una secuencia didáctica encaminada a la construcción de conceptos y comprensión de las transformaciones isométricas.

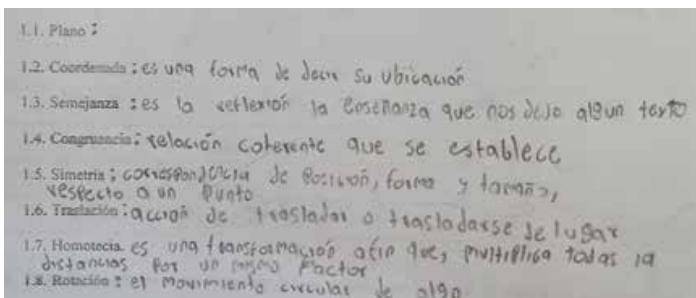
Resultados y Discusión

La prueba diagnóstica fue el punto de partida para establecer las características que debe tener un dispositivo didáctico mediante el cual se pueda orientar la enseñanza y el aprendizaje de las isometrías. Esta prueba se formuló como instrumento para estructurar la primera fase de un proyecto, cuyo objetivo es establecer elementos de comprensión de las transformaciones isométricas mediante el uso del software GeoGebra desde los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele. La prueba se estructuró mediante siete actividades, cada una de ellas exige llevar a cabo procesos progresivos en torno a los niveles de razonamiento propuestos por los esposos Van Hiele.

La primera actividad exploró el nivel de Análisis (Nivel 2) y se planteó a los estudiantes definir ocho conceptos geométricos básicos.

Figura 2

Definición de conceptos





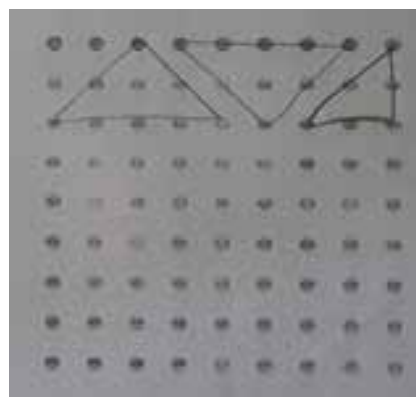
Nota 2. La imagen refleja la generalidad de las respuestas, en las cuales los estudiantes no definieron el plano y en cuanto a los demás conceptos no tienen un significado unificado ni apto, teniendo en cuenta el grado en el que se encuentran.

Aproximadamente el 50% de los estudiantes definió más de cinco conceptos. Sin embargo, no expresan de forma clara la relación del significado con lo que representa la estructura formal, mostrando que, si imagina el objeto, pero no lo puede definir correctamente o su respuesta es ambigua. El 17% de los estudiantes no define ningún concepto, se infiere que no reconocen el concepto, y en otros casos tienen dificultades léxicas para construir un concepto.

La segunda actividad corresponde al nivel de reconocimiento (Nivel 1) se privilegia la visualización presentando un geoplano y un triángulo equilátero, sin advertir por escrito las propiedades, se pide al estudiante que ubique el triángulo en diferentes posiciones sobre el plano y describa en términos geométricos cada una de las transformaciones que se presenten.

Figura 3

Algunas propuestas



Nota 3 Aunque la imagen presentada era claramente un triángulo equilátero, las respuestas muestran que los estudiantes no se percataron de esta condición, tampoco se fijaron en la conservación del tamaño ni la forma y dibujaron todo tipo de triángulos.

La tercera actividad se asocia al nivel de Clasificación (Nivel 3) se presentan tres triángulos y se le pide al estudiante clasificarlos según la medida de los lados y según sus ángulos.



Tabla 2

Resultados de la clasificación de los triángulos según sus lados

Cantidad de triángulos clasificados		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	Cero	7	24,1	24,1	24,1
	Uno	1	3,4	3,4	27,6
	Dos	2	6,9	6,9	34,5
	Tres	19	65,5	65,5	100,0
	Total	29	100,0	100,0	

Nota 4 Aunque la imagen presentada era claramente un triángulo equilátero, las respuestas muestran que los estudiantes no se percataron de esta condición, tampoco se fijaron en la conservación del tamaño ni la forma y dibujaron todo tipo de triángulos.

Tabla 3

Clasificación de los triángulos sus ángulos

Cantidad de triángulos clasificados		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	Cero	26	89,7	89,7	89,7
	Uno	3	10,3	10,3	100,0
	Total	29	100,0	100,0	

Nota 5 Cuando los estudiantes clasificaron los triángulos de acuerdo a los ángulos (tabla 2), aparecieron respuestas que incluían los términos “agudo” “obtuso”, aunque no correspondieran a la característica específica.

Figura 4

Clasificación de triángulos según sus lados y ángulos

Triángulo	s/ lados	s/ ángulos
1	Isocelos	Agudo
2	Equilátero	Obtuso
3	Escaleno	Grave

Nota 6 Los estudiantes saben los nombres de los ángulos, pero no la correspondencia con los triángulos

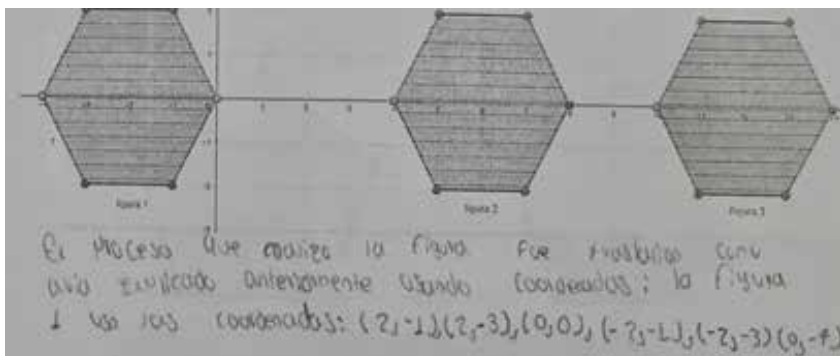
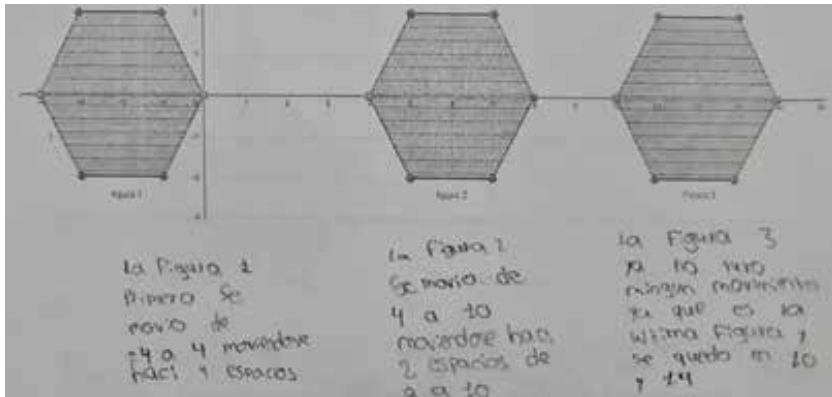


La cuarta actividad, también asociada al nivel de Clasificación (Nivel 3), presenta tres figuras, la inicial y dos traslaciones de esta y las respuestas se categorizaron así: “no reconoce la traslación”, “reconoce la traslación” o “reconoce y describe la traslación”.

Según las respuestas el 20 % de los estudiantes reconoce y describe la traslación (pertenecen a la tercera categoría), 50 % de la muestra ni reconoce, ni describe una traslación se destacan respuestas como: “la figura se va copiando por el plano cartesiano”, “la figura se desplaza 2 veces en el plano cartesiano, este se traslada 14 puntos”, “para obtener la figura dos se traslada 4 unidades hacia la derecha” y “la figura se traslada hacia el lado derecho positivo”.

Figura 5

Definición de traslaciones



Nota 7 Quienes lograron identificar y describir las traslaciones, reconocen y tienen en cuenta elementos, como las coordenadas, y la conservación de la forma y el tamaño.



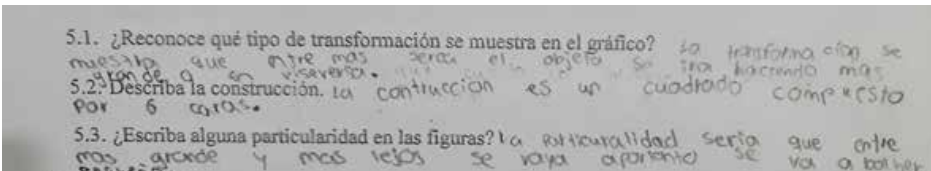
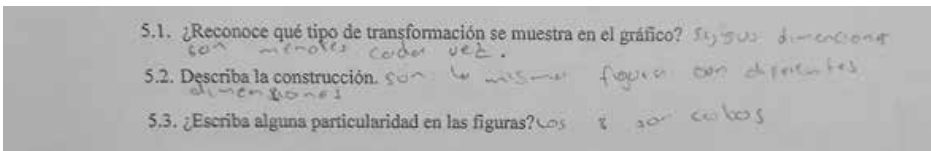
Los estudiantes que lograron hacer un acercamiento a la transformación, usan elementos y conceptos que reconocen. Sin embargo, aunque puedan describir el movimiento de la figura, aún no logran conceptualizar de manera más formal lo que es una traslación.

La quinta actividad se orienta al nivel de Deducción Formal (Nivel 4). En la que se propuso una imagen que muestra homotecias de un cubo para indagar si el estudiante reconoce qué tipo de transformación se muestra en el gráfico, cómo describe la construcción y qué particularidades puede identificar en las figuras.

Los resultados manifiestan que el 72 % de los estudiantes no reconocen ninguna característica de la transformación (dejaron en blanco el espacio de las respuestas), por otro lado, quienes intentaron dar respuesta, no relacionaron las transformaciones con una homotecia, esto lo evidencian algunas descripciones.

Figura 6

Homotecias



Nota 8 Específicamente el término homotecia no es referido por los estudiantes, pues describen situaciones de cambios de dimensional sin mencionarlo.

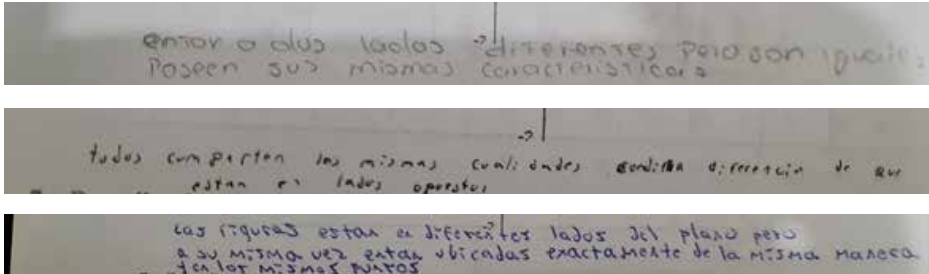
En particular los estudiantes no ejecutan procesos relacionados con la deducción formal ni con la transformación de características geométricas en conceptos matemáticos, tampoco clasifican los objetos propuestos dentro del concepto de las transformaciones.

La sexta actividad relacionada con el nivel de Deducción Formal (Nivel 4), presenta al estudiante un polígono resaltando tanto geoméricamente como en el enunciado la presencia de una simetría la intención de la actividad es que el estudiante a partir de la gráfica construyera el concepto de simetría.



Figura 7

Definiciones de Simetría



La mayoría de los estudiantes pudieron reconocer el movimiento de la figura, sin embargo, no reflejan en sus descripciones el reconocimiento del eje de simetría, impidiéndoles construir claramente la definición. Esto manifiesta que los estudiantes aún no han alcanzado el nivel de deducción formal. Este resultado corrobora otros de investigaciones previas, como las de Jaime Pastor, (1993) y Alsina et al. (s.f.) en las cuales los estudiantes solamente han alcanzado el nivel 3.

Finalmente, la actividad siete se asocia al nivel de Rigor (Nivel 5). Se presenta a los estudiantes dos construcciones tridimensionales, un dodecaedro y un tetraedro, en el caso del dodecaedro, se presenta la construcción y además dos planos que seccionan la figura en dos partes exactamente iguales, la idea es que el estudiante determine las características básicas de la figura e identifique las simetrías del poliedro.

Retomando los resultados obtenidos de la sexta actividad se infiere que los estudiantes no están en capacidad de relacionar figuras bidimensionales, Esto se extendió a los resultados de la actividad propuesta con figuras 3D.

En general los estudiantes identifican y caracterizan someramente los polígonos y poliedros a partir de los elementos geométricos básicos como las caras, aristas, vértices y polígonos, pero no relacionan los nombres de los poliedros ni por la cantidad de caras ni por su forma, tampoco tienen en cuenta los planos que dividen la figura. Se restringen a las características elementales de las figuras que se estudian repetitiva y mecánicamente durante los primeros años escolares.



Conclusión

La estructuración del instrumento analizado se realizó teniendo en cuenta los niveles de razonamiento de Van Hiele, pero no de manera progresiva por ello el orden de las actividades no corresponde estrictamente al orden de los niveles. Sin embargo, se lograron determinar las restricciones y condiciones que tienen los estudiantes para razonar geoméricamente.

Aunque la estructura del instrumento no afectó el propósito del análisis, al proyectar una secuencia es necesario que las actividades se planteen de forma gradual, tanto para las fases que permiten avanzar en los niveles, como para los niveles mismos.

Al analizar la prueba se encontró que los conceptos, ideas y relaciones de los estudiantes respecto a las construcciones geométricas basadas en transformaciones isométricas de formas poligonales y poliédricas son aún elementales y están regidos a las características primarias, repetitivas y mecanizadas.

Los resultados permiten inferir que los estudiantes identifican elementos básicos de las figuras geométricas y de algunas construcciones que se pueden hacer con ellas, pero esto no es suficiente para conceptualizar de forma concreta. La escasa fundamentación de los conceptos geométricos les impide construir definiciones y caracterizar objetos Venegas, (2015). Esto se refleja en la escasez de léxico para responder a las preguntas y describir situaciones.

Los estudiantes tienen, por lo general, una representación mental de los objetos, pero el tipo de lenguaje que utilizan para construir conceptos, o la ausencia de respuestas, demuestra que es necesario diseñar esquemas que contribuyan a la aprehensión de lenguaje geométrico que permita describir e identificar objetos de manera más precisa.

El análisis de la prueba diagnóstica no solamente permitió determinar los conceptos, las ideas y las relaciones que tienen los estudiantes con respecto a las construcciones geométricas basadas en transformaciones isométricas de formas poligonales y poliédricas. Sino que también se proyectan algunas características que debe tener un dispositivo didáctico que permita orientar la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones isométricas

Por ejemplo se asume que es posible realizar una fundamentación teórica partiendo de la hibridación de la Teoría de los Registros de Representaciones Semiótica (TRRS) y la Teoría de los Campos conceptuales (TCC), teniendo en cuenta que estas se enfocan en el



desarrollo de procesos cognitivos que llevan a la generación y ejecución de procesos matemáticos a partir del tratamiento de objetos, permitiendo al estudiante modelar nuevas representaciones de orden verbal, conceptual y geométrico Godino, (s.f.).

Se propone diseñar un dispositivo didáctico apto para los ambientes híbridos de aprendizaje, con fundamentación teórica que vincule los procesos y los objetos, y que dinamice el modelo de Van Hiele, tanto en su aspecto instructivo, como en su aspecto descriptivo vinculando los Ambientes Virtuales de Aprendizaje (AVA) y las Tecnologías de Aprendizaje y Conocimiento (TAC).



Referencias

- ALSINA, Á., LUISA, M., MARTÍN, N., & ROBLES, A. M. (N.D.). Educación Matemática en la Infancia Redescubriendo el entorno con ojos matemáticos: Aprendizaje realista de la geometría en Educación Infantil Rediscovering the environment with mathematical eyes: Realistic learning geometry in Early Childhood Education. <http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6>
- FARIAS, M. (2017). DINAMIZACIÓN DE LOS PROCESOS DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE CONCEPTOS GEOMÉTRICOS INMERSOS EN LA CARACTERIZACIÓN Y CONSTRUCCIÓN DE LOS SÓLIDOS PLATÓNICOS, MEDIANTE EL USO DEL SOFTWARE GEOGEBRA.
- GODINO, J. D. (N.D.). Hibridación de teorías: El caso del Enfoque Ontosemiótico y la Didáctica Francesa 1. Retrieved May 9, 2022, from https://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino_Hibridacion_teorias.pdf
- HERNÁNDEZ SAMPIERI, R., FERNANDEZ COLLADO, C., & BAPTISTA LUCIO, P. (2014). metodología de la investigación (MnGraw Hill, Ed.). <http://observatorio.epacartagena.gov.co/wp-content/uploads/2017/08/metodologia-de-la-investigacion-sexta-edicion.compressed.pdf>
- JAIME PASTOR, A. (1993). Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento. Tesis de Doctorado, 302. <http://roderic.uv.es/handle/10550/37994>
- LEGUIZAMÓN, J. F., PATIÑO, O. Y., & SUÁREZ, P. (2015). Tendencias didácticas de los docentes de matemáticas y sus concepciones sobre el papel de los medios educativos en el aula. <http://funes.uniandes.edu.co/13332/1/Leguizamon2015Tendencia.pdf>
- MEN, M. DE E. N. (N.D.). LINEAMIENTOS CURRICULARES. RETRIEVED JUNE 1, 2022, from https://www.mineduacion.gov.co/1780/articles-339975_matematicas.pdf
- MEN, M. DE E. N. (2006). ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS EN MATEMÁTICAS. https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf
- MEN, M. DE E. N. (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas. https://wccopre.s3.amazonaws.com/Derechos_Basicos_de_Aprendizaje_Matematicas_1.pdf
- MONGE, A., & VALLEJOS, R. (2012). El uso del juego como mediador del conocimiento matemático a partir de las experiencias docentes. <http://www.cientec.or.cr/matematica/2012/ponenciasVIII/Adolfo-Monge.pdf>
- VENEGAS, M. (2015). Niveles De Razonamiento Geométrico De Van Hiele



Al Resolver Problemas Geométricos: Un Estudio Con Alumnos De 13 a 16 Años En Cantabria. Tesis de Maestría, 49. <https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/6837/VenegasPerezIrene.pdf?sequence=1&isAllowed=y>