EL APRENDIZAJE DE CONCEPTOS ELEMENTALES DE LÓGICA Y TEORÍA DE CONJUNTOS

Nancy Milena Soler Torres[1]
Alfonso Jiménez Espinosa[2]

Resumen

La investigación buscó determinar dificultades en la comprensión de conceptos fundamentales de Lógica y Teoría de Conjuntos en estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la UPTC. La problemática se contextualiza teóricamente en las dificultades, errores y la relación entre el lenguaje usual y matemático; además, aspectos relativos a la lógica matemática, como inferencias, cuantificadores, conectivos y demostración. Se adoptó un enfoque cualitativo de tipo descriptivo, mediante un estudio de caso con un análisis longitudinal de tendencia a lo largo de cuatro semestres; se hicieron observaciones de clase, cuestionarios y entrevistas semiestructuradas a profesores y estudiantes. Los resultados mostraron que los estudiantes tienen dificultades y errores en la interpretación y comprensión de conceptos, símbolos y vocabulario matemático básico, como cuantificadores, reglas de inferencia, conectivos lógicos, operaciones entre conjuntos, las fallas persisten durante la indagación, lo cual amerita un análisis especial al desarrollo de estos cursos.

Palabras clave: *lógica, teoría de conjuntos, aprendizaje, dificultad, error.*

1 Estudiante Maestría en educación Matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Email:nancy.soler@uptc.edu.co ORDCID: https://orcid.org/0009-0007-6951-7349

2 PhD. Educación Matemática, Docente titular Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia; Email: alfonso.jimenez@uptc.edu.co ORCID: https://orcid.org/0000-**0001-9557-0396**

ISSN: 2619-5658

Abstract.

This problematic is theoretically found in the difficulties, errors and, in the relationship between the communicative language and the mathematical language; in addition, aspects related to the mathematical logic such as inferences, quantifiers, connectors and, demonstration. The present is a qualitative, descriptive-type investigation, carried out with a case study and a longitudinal trend analysis during 4 semesters; class observations, questionaries and semistructured interviews were applied to both, professors and students.

The findings reveal that the students present difficulties and errors in the interpretation and comprehension of concepts, symbols and mathematical vocabulary such as quantifiers, inference rules, logical connectors, sets operations and, others that persisted during the 4 semesters, which deserve a special analysis about the development of said courses.

Key words: *logic, set theory, learning, difficulty, error.*

Introducción

Las matemáticas se caracterizan por tener un lenguaje formal único conocido como "lenguaje matemático", éste es fundamental para el aprendizaje y la comprensión de los conceptos matemáticos básicos, así como para el manejo adecuado de la disciplina. Son habituales las dificultades y vacíos que presentan los estudiantes a lo largo de la Licenciatura en Matemáticas, lo cual afecta de manera negativa no solo el aprendizaje y el aprovechamiento de los cursos de Lógica y Teoría de Conjuntos, sino también de todas las áreas relativas a la disciplina matemática, ya que es en estos donde se aprende el manejo fundamental de un lenguaje especializado: el lenguaje de las matemáticas. De este modo, la investigación se realizó con el objetivo de determinar y analizar las dificultades más comunes que se presentan en el dominio de los conceptos fundamentales de Lógica y Teoría de Conjuntos de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC). El estudio surge por el notable número de estudiantes del programa que tienen bajo rendimiento o pierden estos cursos, lo que se convierte en uno de los mayores motivos de deserción escolar del programa.

De acuerdo con las entrevistas realizadas a los estudiantes, la razón de lo anteriormente mencionado se debe a la complejidad de la asignatura, y a que se deben hacer muchas demostraciones; además, se destaca que el dominio del lenguaje matemático es fundamental para que se lleven a cabo los procesos de demostración. Es importante destacar que los estudiantes están acostumbrados a abordar la matemática de una manera más mecánica, utilizando procesos algorítmicos que conducen a resultados exactos, a diferencia de la lógica, que requiere de un razonamiento profundo y reflexivo; es decir, tener la capacidad de analizar y comprender los argumentos y estructuras lógicas. En los cursos de lógica es esencial que los estudiantes desarrollen sólidas habilidades de razonamiento, así como la capacidad de discernir y aplicar principios lógicos y reglas de inferencia de manera efectiva para llevar a cabo demostraciones correctamente; este cambio de enfoque puede resultar desafiante para muchos estudiantes y contribuir a las dificultades que enfrentan en la asignatura.

Es importante hacer referencia a aspectos como la comprensión lectora, la relación entre el lenguaje matemático, el usual, los errores; las dificultades más frecuentes que cometen los estudiantes en la interpretación y en el aprendizaje de las matemáticas.(Gordillo & Restrepo,2012) establecen dos niveles de comprensión lectora, el nivel literal y el inferencial. El nivel literal se establecen tres indicadores: 1. Lectura literal parcial con omisión de información, que ocurre cuando la persona se queda con una idea superficial del texto. Indicador 2. Lectura literal estricta: el lector se limita a decodificar el texto sin interpretarlo, lo que indica una falta de dominio conceptual y procedimental de la lección. Indicador 3. Lectura literal con asociación parcial de algunas propiedades: se trata de un nivel de lectura en el que el lector comienza a procesar la información y a identificar algunos conceptos y procedimientos de forma parcial.

Respecto al nivel inferencial se consideran dos indicadores: 1. Lectura inferencial con asociación limitada de las propiedades y procedimientos: el lector interpreta la información y comprende algunas características de las operaciones involucradas en los procedimientos. 2. Lectura inferencial con asociación total de propiedades y procedimientos: el lector analiza la información y comprende las características de las operaciones y las conexiones entre los pasos del proceso.

Como todas las áreas de la ciencia, cada una maneja un lenguaje especializado o técnico que también da identidad al área correspondiente; por ejemplo, en la matemática se puede hacer la apreciación de un mayor grado de complejidad, ya que se hace relación de nuevos símbolos y signos que le dan sentido a un contexto con situaciones que varían dependiendo del nivel académico (Díaz et al., 2009). En el caso de la asignatura Lógica y Teoría de Conjuntos se inicia con el manejo de un lenguaje de primer orden, desde los conceptos elementales, partiendo de las letras que representan las proposiciones, combinándolas con los conectivos para formar nuevas proposiciones compuestas, siguiendo con los cuantificadores universal, existencial, de unicidad, y el uso de las tautologías, hasta llegar a constituirse en un verdadero lenguaje especializado: el lenguaje de la lógica matemática.

Habitualmente en la clase de matemáticas, específicamente teniendo como referencia los cursos de Lógica y Teoría de Conjuntos, es común que los profesores no dediquen mucha atención a la importancia del manejo del lenguaje especializado, lo cual puede llevar a generar dificultades en los aprendices de dicho curso; estas falencias pueden conducir a la desmotivación y desconexión del estudiante con el desarrollo, la comprensión del contenido matemático; lo cual se refleja en la repitencia e incluso en el abandono de los cursos y de la carrera.

Al respecto de esta problemática Carrillo (2009) señala que estas dificultades están relacionadas con la propia naturaleza de las matemáticas, especialmente con la complejidad inherente de los conceptos; los profesores suelen recurrir a diversos métodos y estrategias para facilitar la enseñanza de los conceptos complejos, tales como utilizar analogías o el empleo del lenguaje cotidiano para hacer que estos conocimientos sean más accesibles para los estudiantes; sin embargo, en ocasiones estas estrategias, aunque bien intencionadas, pueden resultar confusas, generar más dudas y errores en los estudiantes en lugar de aclararlas.

Así mismo, D´Amore (2006) menciona que el docente debe mantener en equilibrio el lenguaje matemático como usual, pues el proceso de enseñanza requiere de una óptima comunicación donde no se puede inclinar un solo lado de la balanza; es decir, si solamente se usa el lenguaje específico es posible que la clase se torne compleja, incomprensible y por tanto poco satisfactoria; pero si se hace uso excesivo del lenguaje cotidiano la esencia matemática se pierde y no tendría sentido. Según este autor es fundamental que el profesor encuentre estabilidad entre ambos lenguajes para asegurarse que los conceptos se puedan entender de manera clara y comprensible, sin perder su rigurosidad.

Respecto a los antecedentes consultados se presentan estudios relacionados con la demostración, dificultades en la argumentación y comprensión del lenguaje matemático, los cuales sirvieron como guía para analizar la problemática. La investigación realizada por (Mendoza & Martínez, 2019) tuvo como propósito estudiar los esquemas de demostración alcanzados por los estudiantes de la Licenciatura en Matemática de un Centro Universitario de Panamá. El proyecto fue de tipo descriptivo y se implementó el método inductivo-analítico; aplicaron una encuesta que contenía aspectos generales y métodos de demostración. Los resultados evidenciaron que la mayoría de los estudiantes pueden aprender los conceptos básicos, la simbología, la notación matemática, y métodos de demostración; sin embargo, aún no tienen dominio para hacer la manifestación formal, solo el 33 % de los estudiantes lograron este propósito.

La investigación realizada por (Espinoza & David , 2018) mostro las dificultades en la argumentación que presentan los estudiantes de un curso de Fundamentos de aritmética de Licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas de la Universidad de Antioquia. El estudio tuvo un enfoque cualitativo con diseño de caso en donde implementaron dos pruebas, que contenían principalmente situaciones y problemas de razonamiento lógico. Los resultados evidenciaron que los estudiantes tienen dificultades cuando se trata de un lenguaje más formal, especialmente al conjeturar y verificar, siendo aspectos importantes a la hora de realizar demostraciones matemáticas.

El estudio de Hernández et al. (2017) tuvo como propósito analizar el nivel de competencias en el conocimiento y uso de lenguaje matemático de 92 estudiantes que estaban cursando un programa de formación inicial en la carrera de Docencia en matemáticas. La investigación fue transversal de enfoque cualitativo con carácter descriptivo. Trabajaron con los estudiantes de geometría superior, lógica, teoría de conjuntos, teoría de números, álgebra abstracta, análisis matemático y topología, con quienes implementaron un cuestionario, que contenía temas relacionados al lenguaje matemático y la comunicación matemática. Los resultados mostraron que más de la mitad de los estudiantes tenían dificultades en el uso correcto del lenguaje y simbología matemática, al traducir lenguaje formal, cotidiano y viceversa; presentaban poca capacidad de razonamiento, lo que les generó confusión en la resolución de problemas.

Para Radillo et al. (2005) la mayoría de los alumnos memorizan los símbolos y la estructura del lenguaje matemático, pero pocos alcanzan una comprensión profunda del mismo, debido a que no siempre tienen una base sólida en matemáticas, lo cual afecta la comunicación en dicha área. Según el autor presenta falencias en: (a) Comprensión del lenguaje usual en un enunciado matemático, (b) no es claro el vocabulario y los símbolos matemáticos involucrados en el texto, (c) la diversidad del lenguaje matemático debido a que un concepto puede ser expresado en términos algebraicos, geométricos o mediante el uso del lenguaje conjuntista. Adicional a esto, el estudiante puede tener problemas en la propia comprensión lectora de su lengua materna, por deficiencias en los procesos iniciales de inmersión en la lectura.

Elementos Teóricos

Como expresa Rico (1998) “los errores forman parte de las producciones de los alumnos durante su aprendizaje en matemáticas, estos son datos objetivos que encontramos permanentemente en los procesos de enseñanza y aprendizaje que constituyen un elemento estable de dichos procesos” (p. 76). Por su parte, D´Amore et al. (2010) señalan que las dificultades en matemáticas pueden asumir por lo menos tres sentidos distintos: la dificultad del estudiante, la falencia específica de los argumentos matemáticos, y la dificultad del docente en la gestión de una situación matemática; mostrando una estructura triangular (estudiante, maestro, saber). Otra clasificación que proponen estos autores es referente a los tipos de aprendizaje, los cuales son: conceptual, algorítmico, estratégico, comunicativo y de la gestión de diversos registros semióticos.

En este sentido Movshovitz-Hadar et al. (1987) hacen una clasificación de los errores en matemáticas en seis categorías:

Datos mal utilizados: este error sucede cuando el estudiante utiliza datos incorrectos o irrelevantes para resolver el problema, usa los valores numéricos de una variable para otra variable, o realiza una lectura superficial del texto.

Lenguaje mal interpretado: en esta categoría el estudiante traduce de manera incorrecta del lenguaje usual al lenguaje matemático, y viceversa, llevándolo a malinterpretar el enunciado del problema o las instrucciones, representar un concepto matemático con un símbolo que designa a otro concepto.

Inferencia lógicamente inválida: este error ocurre cuando el estudiante hace un razonamiento incorrecto. Por ejemplo, utilizar los cuantificadores de manera inadecuada, la falta de claridad de las reglas de inferencia y los conectivos lógicos.

Teorema o definición distorsionada: el estudiante aplica un teorema, principio, regla, propiedades o definiciones de manera incorrecta o distorsionada.

Solución sin verificar: la principal característica de esta categoría es que el estudiante presenta una solución, pero no verifica si es correcta, ni reflexiona sobre el proceso realizado.

Error técnico: esta categoría incluye errores de cálculo o de procedimiento, errores al extraer datos de tablas, uso incorrecto de paréntesis.

Metodología

La investigación tuvo un enfoque cualitativo, el cual permite realizar un análisis naturalista, cercano, más profundo y reflexivo del problema de investigación; (Bogdan & Taylor, 1987) sostienen que "la tarea de la investigación cualitativa es la de proporcionar una metodología de investigación que permita comprender el mundo de la experiencia vivida" (p. 21). La exploración tuvo un enfoque descriptivo con característica de estudio de caso y un análisis de diseño longitudinal de tendencia a lo largo de cuatro semestres. De acuerdo con Jiménez (2012) "el estudio de caso permite analizar el fenómeno objeto de estudio en su contexto real, utilizando múltiples fuentes de evidencia" (p. 142) y en complemento el diseño longitudinal de tendencia permite examinar varios puntos en el tiempo y ver su evolución

Los estudiantes que en ese momento cursaban las asignaturas de Lógica y Teoría de Conjuntos I y II, durante los periodos 2021, 2022 y 2023. Las técnicas e instrumentos para la recolección de la información fueron: observación de clase en los dos niveles de los cursos anteriormente mencionados, cuestionarios específicos sobre manejo y comprensión de lenguaje, entrevistas focales semiestructuradas a grupos de estudiantes y de profesores de forma separada y el diario de campo de la investigadora. Los cuestionarios abordaban varios aspectos claves como la comprensión lectora, el paso del lenguaje matemático al lenguaje usual y viceversa, el reconocimiento de proposiciones y reglas de inferencia, uso y manejo de cuantificadores, equivalencia entre proposiciones, entre otros. Inicialmente se realizó la observación de 16 clases de Lógica y Teoría de Conjuntos I y II, a tres profesores y a partir de estas observaciones se identificaron dificultades en la comprensión de algunas temáticas de estas asignaturas, para ellos se diseñaron dos cuestionarios, uno para Lógica y Teoría de Conjuntos I y otro para Lógica y Teoría de Conjuntos II. Finalmente las entrevistas focales se realizaron tanto a estudiantes como a profesores, para abordar algunos temas específicos tales como la comprensión lectora y la interpretación del lenguaje matemático.

El análisis de la información se realizó mediante la clasificación de las dificultades, los errores y los niveles de comprensión lectora, luego se establecieron tres categorías para realizar la triangulación de la información.

Resultados y discusión

En el desarrollo de la investigación la primera gran dificultad observada fue la virtualidad a

la que tuvo que recurrirse por la pandemia de Covid 19; pues se pudo constatar que en cursos tan especializados, la virtualidad dificulta la comprensión de las temáticas por parte de los estudiantes. Los profesores pedían insistentemente a los estudiantes participar activamente en las clases virtuales; sin embargo, la respuesta era nula y escasa, o si alguno lo hacía, era a regañadientes. Además se observó que los alumnos no activaban el video durante las clases, pudiendo afectar la interacción entre los participantes; de igual manera, no todos asistían a las clases sincrónicas, optaban por ver la grabación, quizá por facilidad de poder ver la clases en cualquier momento o por situaciones personales, familiares, económicas, laborales o de conectividad. Estos factores contribuyeron a crear barreras adicionales para la enseñanza y el aprendizaje durante el periodo de virtualidad.

De igual manera se observó que algunos estudiantes tienden a usar solo un método de demostración y seguir un mismo patrón, guiados por demostraciones previamente realizadas por el profesor, como si estuvieran siguiendo un algoritmo definido; contrario a lo que menciona Crespo (2005) "a través de las demostraciones y argumentaciones lógicas, es posible evitar la tendencia de la algoritmación de la matemática en el aula, evitando el aprendizaje mecánico de las fórmulas y la aplicación de las mismas de forma rutinaria" (p. 29). Es crucial en la preparación de los docentes de matemáticas poseer un dominio del lenguaje matemático y una comprensión de los procesos lógicos necesarios para llevar a cabo exposiciones.

Otro factor que causa desconcierto en los educandos es el uso de propiedades y significado de los cuantificadores, aunque ellos saben reconocer su simbología, les cuesta hacer una apropiada interpretación y transcripción literal, ya que redactan textualmente sin darle un matiz interpretativo; de igual manera se les complica llevar una expresión a la correcta codificación.

En cuanto a los estudiantes de Lógica y Teoría de Conjuntos II, se evidencia que llegan con vacíos del curso anterior, puesto que presentan falencias en el manejo de lenguaje matemático respecto a conceptos como valores de verdad y uso de los conectores lógicos. A continuación, se muestran las respuestas dadas por algunos alumnos a las preguntas realizadas por el profesor sobre los valores de verdad de algunos conectores lógicos.

P2: ¿Cuándo estas proposiciones (s y r) con el conectivo “o” es verdadero y cuándo es falso?

E14: Me parece que las dos primeras, son verdaderas y las dos segundas, son falsas.

Dado que el estudiante responde de forma incorrecta, el docente hace una explicación de los valores de verdad para la disyunción. Es de destacar también que la pregunta hecha por el profesor no es muy precisa, lo que puede llevar a confusiones.

P2: Ahora ¿En el o exclusivo cuándo es verdadero y cuándo es falso?

El profesor hace llamado a un estudiante y éste no responde, entonces hace llamado a otro estudiante.

E15: Las primeras tres son falsas y la última es verdadera.

P2: No señor.

Ya que la respuesta no es la indicada realiza la misma pregunta a otro estudiante.

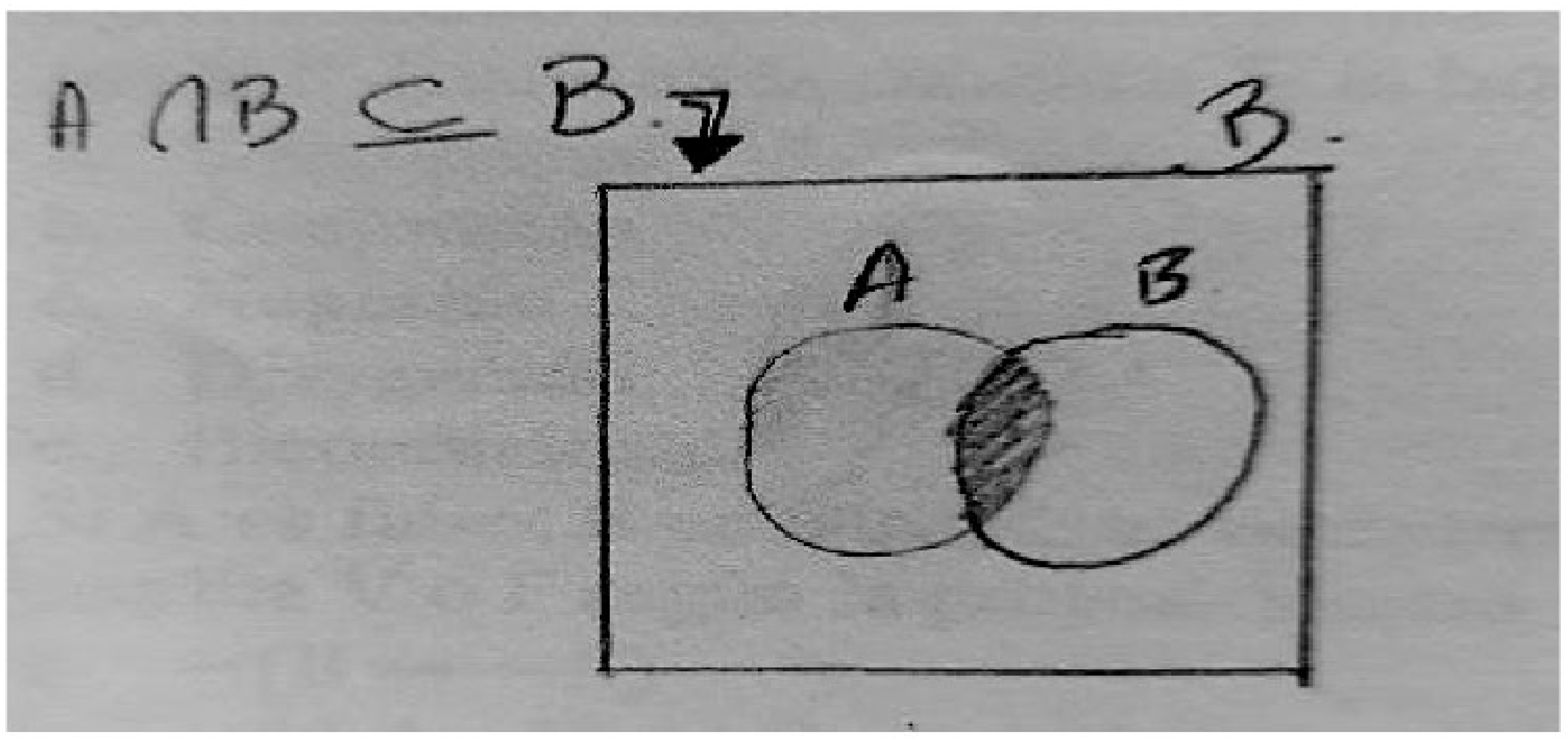
E16: ¡Uy! profe no me acuerdo.

E17: Es falso cuando las proposiciones son verdaderas y también falso, y falso cuando las dos proposiciones son falsas y verdaderas.

Adicionalmente, los estudiantes tienen poco interés hacia la lectura y más si se trata de un trabajo extra clase; esto se refleja cuando tienen que leer un enunciado matemático, dado que lo hacen de forma textual sin interpretar ni tener dominio del lenguaje matemático, llevándolos a cometer errores de interpretación. Además, durante la observación de las clases, se evidenciaron conflictos al realizar demostraciones, algunos alumnos consideran un gráfico o un ejemplo como demostración válida, siempre y cuando se cumpla la propiedad dada, como se muestra en:

Figura1

Respuesta de un estudiante la demostración de una propiedad

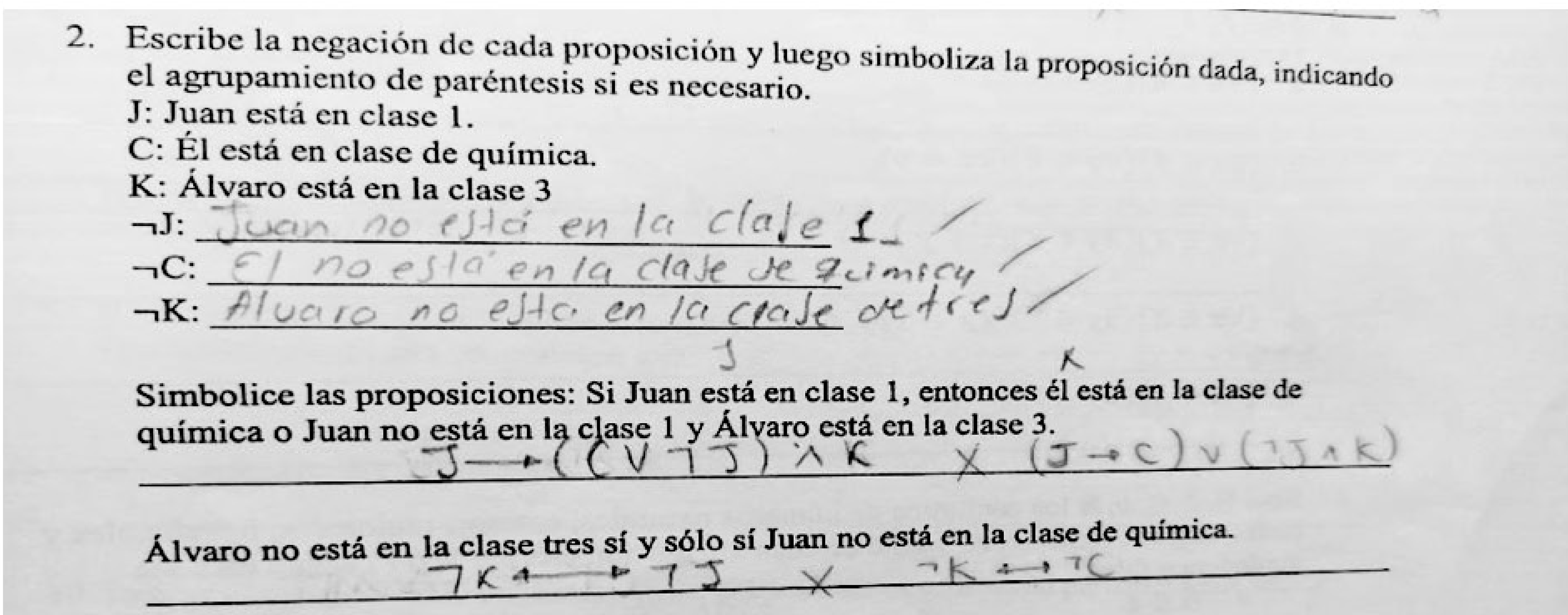


Nota. *La figura muestra un gráfico realizado por un estudiante para representar la demostración de una propiedad.*

Los resultados preliminares permiten deducir que la mayoría de los educandos presentan falencias en comprensión lectora, llevándolos a cometer errores de interpretación, porque ellos leen los textos pero no realizan un análisis profundo de la información presentada; una de las causas puede estar relacionada con la falta de práctica de la lectura comprensiva y de la matemática en particular, como se observa en la figura 2. Como expone (Gordillo & Restrepo, 2012) los estudiantes se encuentran ubicados en el indicador de nivel literal 2 (Lectura literal estricta), es decir, se limitan a decodificar el texto sin interpretarlo, lo que indica una falta de dominio conceptual y procedimental. Por su parte, Movshovitz-Hadar et al. (1987) mencionan que el escolar al realizar una lectura superficial de un enunciado matemático, puede llevarlo a cometer errores como: añadir datos que no son necesarios, olvidar algún antecedente importante para la solución del problema, o no clasificar las variables en un mismo sistema.

Figura 2

Respuesta de un estudiante al segundo punto del cuestionario 1



2. Escribe la negación de cada proposición y luego simboliza la proposición dada, indicando el agrupamiento de paréntesis si es necesario.
J: Juan está en clase 1.
C: Él está en clase de química.
K: Álvaro está en la clase 3
¬J: Juan no está en la clase 1
¬C: El no está en la clase de quimica
¬K: Alvaro no esta en la clase de tres

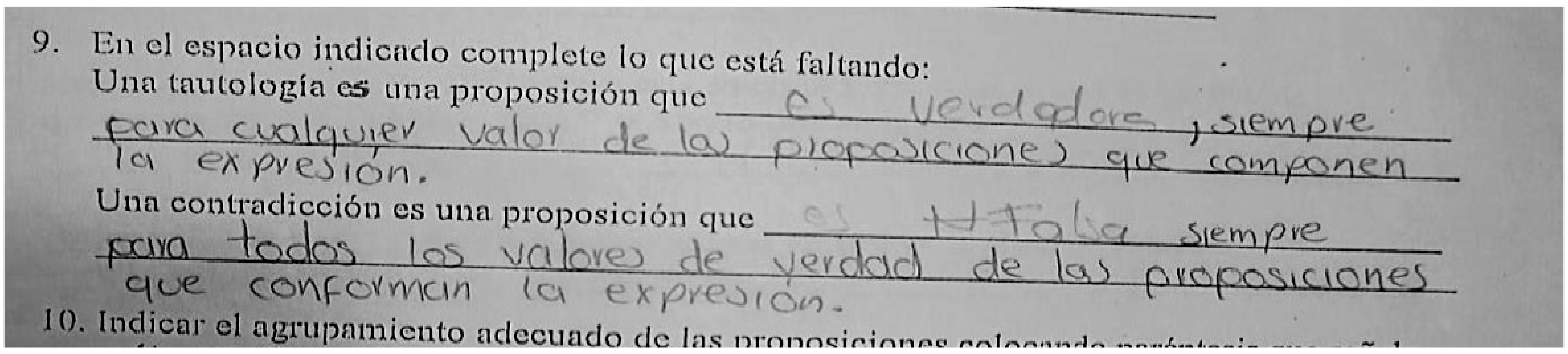
Simbolice las proposiciones: Si Juan está en clase 1, entonces él está en la clase de química o Juan no está en la clase 1 y Álvaro está en la clase 3.
J → ((C V ¬J) ∧ K   X   (J → C) ∨ (¬J ∧ K)

Álvaro no está en la clase tres sí y sólo sí Juan no está en la clase de química.
¬K ↔ ¬J   X   ¬K ↔ ¬C

Nota. *Edición hecha por el autor con base en la respuesta dada por un estudiante. Adicionalmente, a los alumnos se les dificultó escribir las equivalencias de algunas Figura 3proposiciones al no tener claridad en la definición de términos como contradicción, tautología, axioma, entre otros, sabiendo que estos conceptos* *deben ser ya familiares para los estudiantes; por ejemplo, la figura 3 muestra uno de los puntos del cuestionario 2 que pedía escribir la definición de tautología y de contradicción; la mayoría de los estudiantes definió la tautología como una proposición verdadera y la contradicción como una proposición falsa, respuesta incompleta en los dos casos.*

Figura 3

Respuesta de un estudiante al cuestionario 2

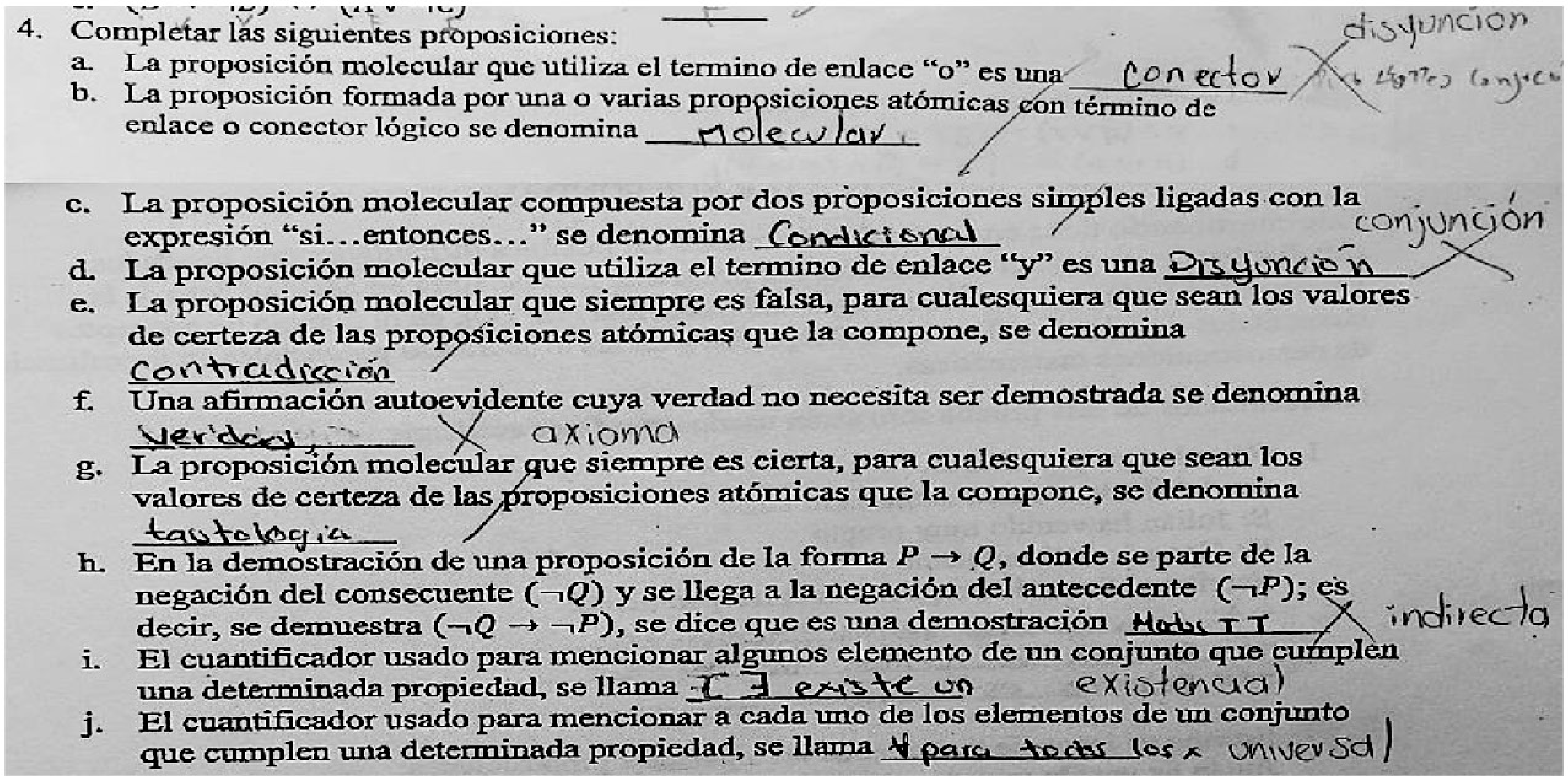

9. En el espacio indicado complete lo que está faltando:
Una tautología es una proposición que es verdadera, siempre para cualquier valor de las proposiciones que componen la expresión.
Una contradicción es una proposición que es Falsa siempre para todos los valores de verdad de las proposiciones que conforman la expresión.
10. Indicar el agrupamiento adecuado de las proposiciones colocando paréntesis...

Nota. *La figura muestra la respuesta de un estudiante para definir tautología y contradicción.*

Así mismo, en la figura 4 se evidencia que no hay coherencia entre concepto y significado; Movshovitz-Hadar et al. (1987) lo identifican como un error que se ubica en teorema o definición distorsionada, esto ocurre cuando el estudiante aplica un teorema, principio, regla, propiedades o definiciones de manera incorrecta o distorsionada.

Figura 4

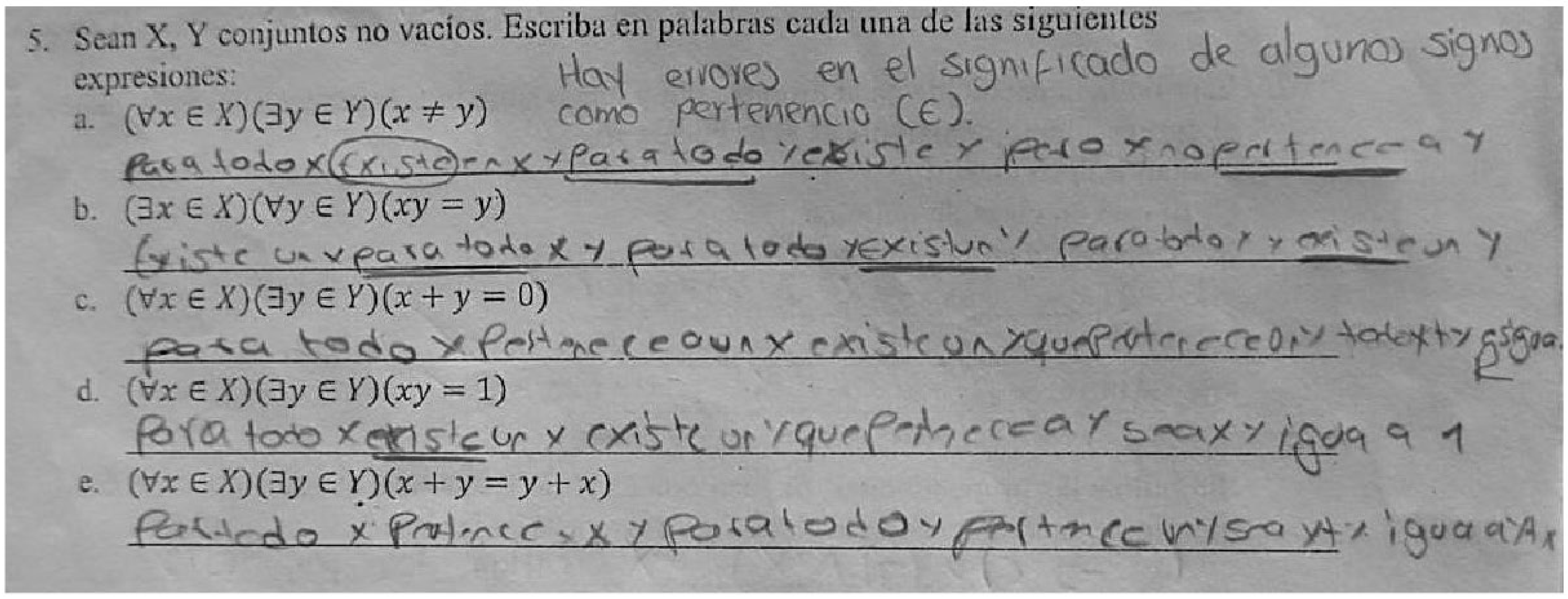
Respuesta de un estudiante al cuestionario 1


4. Completar las siguientes proposiciones:
a. La proposición molecular que utiliza el termino de enlace "o" es una conector ✗ disyuncion
b. La proposición formada por una o varias proposiciones atómicas con término de enlace o conector lógico se denomina molecular
c. La proposición molecular compuesta por dos proposiciones simples ligadas con la expresión "si…entonces…" se denomina Condicional
d. La proposición molecular que utiliza el termino de enlace "y" es una Disyunción ✗ conjunción
e. La proposición molecular que siempre es falsa, para cualesquiera que sean los valores de certeza de las proposiciones atómicas que la compone, se denomina contradicción
f. Una afirmación autoevidente cuya verdad no necesita ser demostrada se denomina verdad ✗ axioma
g. La proposición molecular que siempre es cierta, para cualesquiera que sean los valores de certeza de las proposiciones atómicas que la compone, se denomina tautología
h. En la demostración de una proposición de la forma $P \rightarrow Q$, donde se parte de la negación del consecuente $(\neg Q)$ y se llega a la negación del antecedente $(\neg P)$; es decir, se demuestra $(\neg Q \rightarrow \neg P)$, se dice que es una demostración Modus TT ✗ indirecta
i. El cuantificador usado para mencionar algunos elemento de un conjunto que cumplen una determinada propiedad, se llama ∃ existe un (existencia)
j. El cuantificador usado para mencionar a cada uno de los elementos de un conjunto que cumplen una determinada propiedad, se llama ∀ para todos los x (universal)

Nota. *Edición hecha por el autor con base en la respuesta dada por un estudiante. De la misma manera se identificó que los alumnos cometen errores al pasar del lenguaje usual al matemático y viceversa, dado que hacen una transcripción de los signos pero no logran darle sentido a la expresión matemática; aunque reconocen la mayoría de símbolos no logran realizar una interpretación adecuada tanto del lenguaje matemático como del usual, además tampoco comprenden el significado y uso de algunos símbolos tan esenciales como los de pertenencia y contenencia como se muestra en las figuras 5 y 6.*

Figura 5

Respuesta de un estudiante al cuestionario 2



5. Sean X, Y conjuntos no vacíos. Escriba en palabras cada una de las siguientes expresiones:

Hay errores en el significado de algunos signos como pertenencia ($\in$).

a. $(\forall x \in X)(\exists y \in Y)(x \neq y)$

b. $(\exists x \in X)(\forall y \in Y)(xy = y)$

c. $(\forall x \in X)(\exists y \in Y)(x + y = 0)$

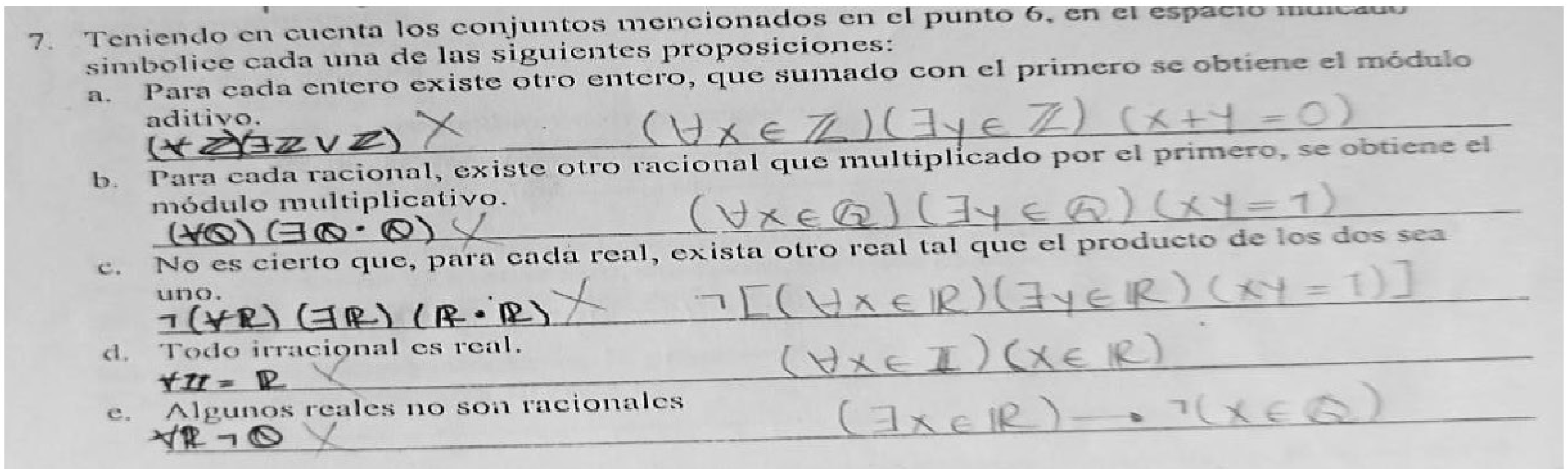
d. $(\forall x \in X)(\exists y \in Y)(xy = 1)$

e. $(\forall x \in X)(\exists y \in Y)(x + y = y + x)$

Nota. *Edición hecha por el autor con base en la respuesta dada por un estudiante.*

Figura 6

Respuesta de un estudiante al cuestionario 2



7. Teniendo en cuenta los conjuntos mencionados en el punto 6, en el espacio indicado simbolice cada una de las siguientes proposiciones:

a. Para cada entero existe otro entero, que sumado con el primero se obtiene el módulo aditivo.

$(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z})(x + y = 0)$

b. Para cada racional, existe otro racional que multiplicado por el primero, se obtiene el módulo multiplicativo.

$(\forall x \in \mathbb{Q})(\exists y \in \mathbb{Q})(xy = 1)$

c. No es cierto que, para cada real, exista otro real tal que el producto de los dos sea uno.

$\neg[(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(xy = 1)]$

d. Todo irracional es real.

$(\forall x \in \mathbb{I})(x \in \mathbb{R})$

e. Algunos reales no son racionales

$(\exists x \in \mathbb{R}) \longrightarrow \neg(x \in \mathbb{Q})$

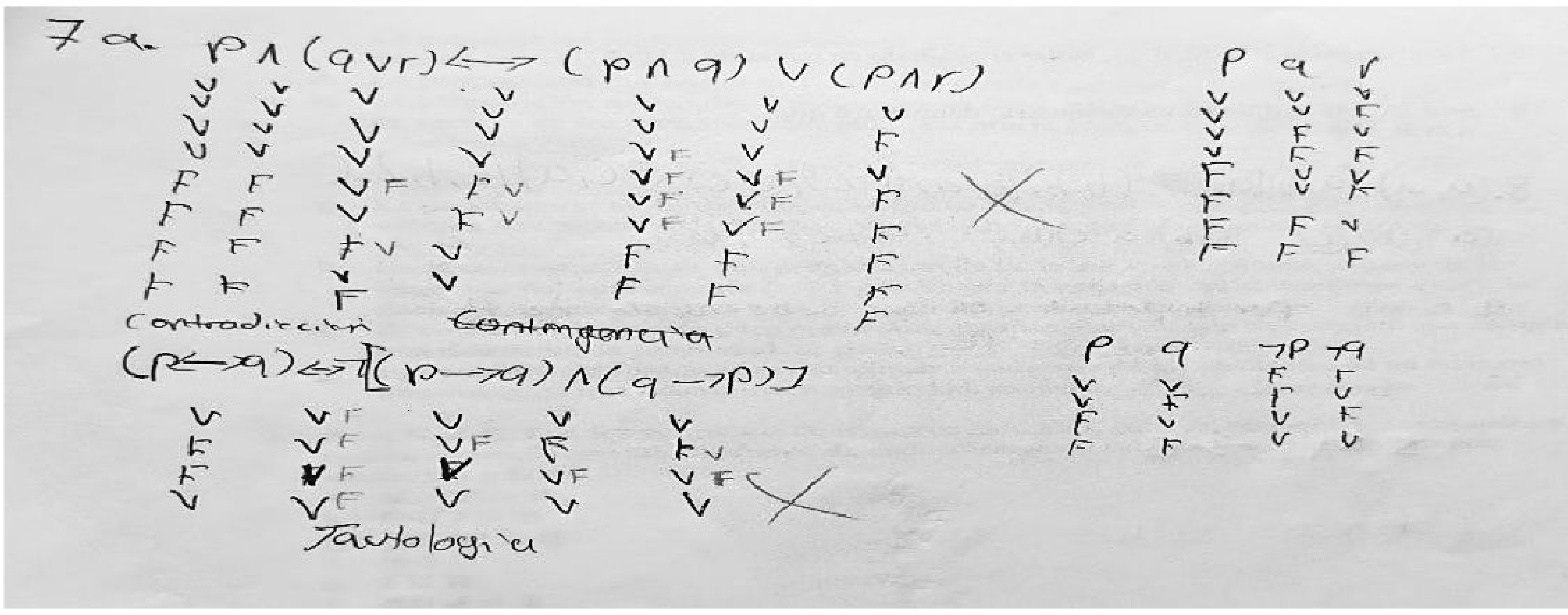
Nota. *En la imagen se muestra el paso del lenguaje usual al matemático realizado por un estudiante.*

Según Radatz (1979) muchos estudiantes consideran que aprender el lenguaje matemático es similar a una lengua extranjera debido a las falencias al momento de interpretar los conceptos, símbolos y vocabulario matemático. Una dificultad que se percibió reiterativamente es el manejo y jerarquía de los paréntesis, tan fundamental en matemáticas siendo éstos quienes dan significado a una expresión o proposición.

Otra problemática es la falta de comprensión en algunas bases del conocimiento matemático tales como: los valores de verdad de los conectivos lógicos y la predominancia o dominio en una proposición molecular; por eso durante el proceso de aprendizaje surgen dificultades que son resultado de la deficiente comprensión, como se observa en la figura 7. Movshovitz-Hadar et al. (1987) clasifican en inferencia lógicamente inválida, este error cuando el estudiante hace un razonamiento incorrecto, por ejemplo, utilizar los cuantificadores de manera inadecuada, la falta de claridad de las reglas de inferencia y los conectivos lógicos.

Figura 7

Respuesta de un estudiante al cuestionario 1



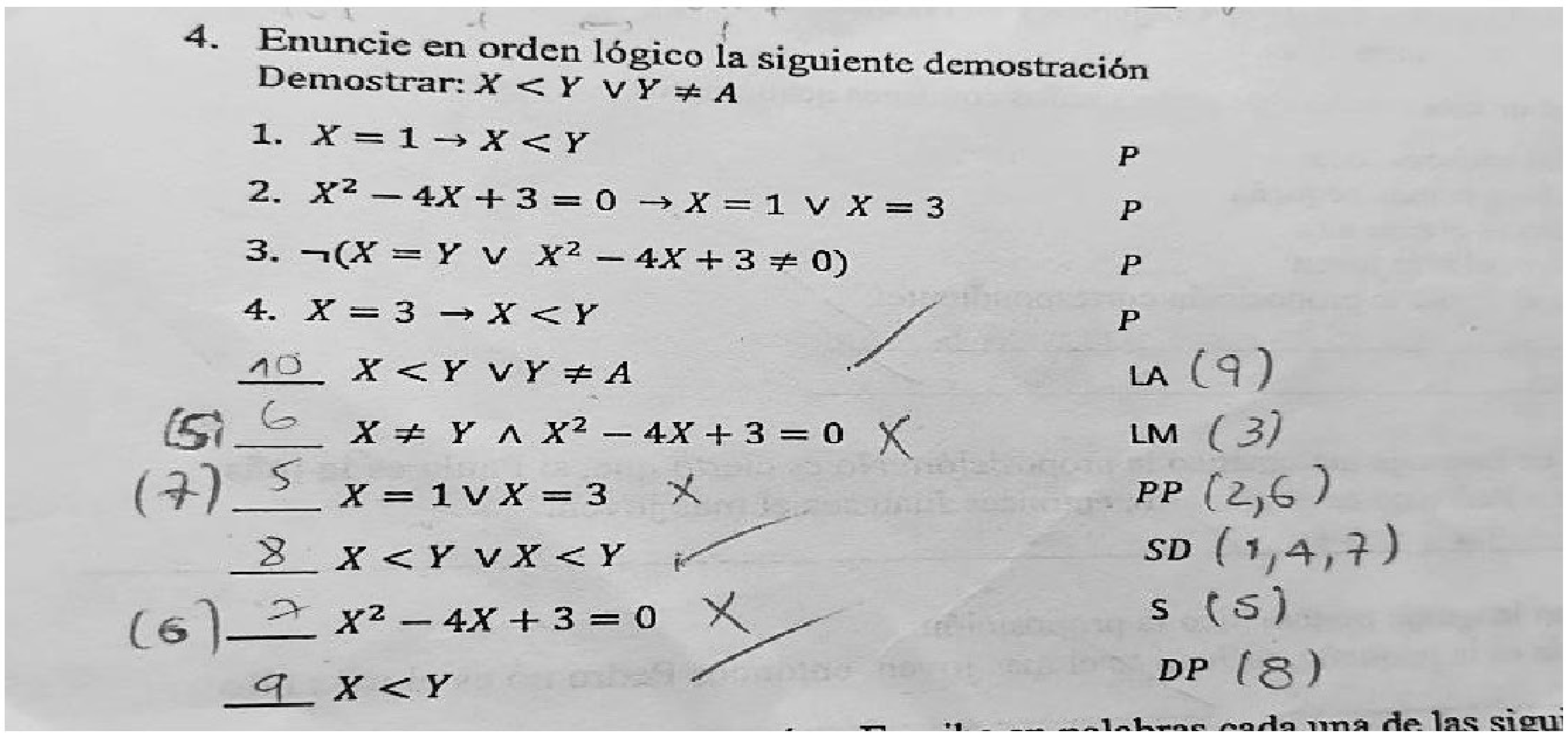
Nota. *En la imagen se observa los valores de verdad dados por un estudiante a una proposición.*

Uno de los errores más frecuentes cometidos por los estudiantes es la falta de verificación en la solución; de acuerdo con estos mismos autores, los estudiantes presentan una solución pero no verifica si es correcta o no, ni reflexionan sobre el proceso realizado.

Además construyen patrones o reglas como generalidad en una situación, que en el momento pueden ser útiles, pero no funcionan en todos los casos, por consiguiente, no pueden evidenciar las fallas cometidas durante el procedimiento, como se evidencia en la siguiente imagen

Figura 8

Respuesta de un estudiante al cuestionario 2



4. Enuncie en orden lógico la siguiente demostración
Demostrar: $X < Y \vee Y \neq A$

	1. $X = 1 \rightarrow X < Y$	P
	2. $X^2 - 4X + 3 = 0 \rightarrow X = 1 \vee X = 3$	P
	3. $\neg(X = Y \vee X^2 - 4X + 3 \neq 0)$	P
	4. $X = 3 \rightarrow X < Y$	P
	10 $X < Y \vee Y \neq A$	LA (9)
(5)	6 $X \neq Y \wedge X^2 - 4X + 3 = 0$	LM (3)
(7)	5 $X = 1 \vee X = 3$	PP (2,6)
	8 $X < Y \vee X < Y$	SD (1,4,7)
(6)	7 $X^2 - 4X + 3 = 0$	S (5)
	9 $X < Y$	DP (8)

Nota. *Demostración realizada por un estudiante.*

Conclusiones

Las dificultades de la mayoría de los estudiantes en observaciones de clase, el análisis de los cuestionarios involucra el uso y comprensión del lenguaje matemático. De acuerdo con Carrillo (2009) las matemáticas usan un lenguaje formal, el cual es diferente del usual, provocando en los estudiantes conflictos de interpretación del lenguaje que llevan a cometer errores.

El 80 % de los errores identificados corresponden al paso del lenguaje usual al lenguaje matemático y viceversa, sobre todo cuando se trata del uso de cuantificadores y el manejo de expresiones equivalentes, dado que la mayoría de los alumnos reconocen los símbolos matemáticos, pero no así la estructura del lenguaje, pues no tienen un dominio y comprensión de éste.

La mayoría de los estudiantes de Lógica y Teoría de Conjuntos I - II tienen falencias respecto al manejo de lenguaje matemático y dificultades conceptuales en términos tales como: reglas de inferencia, conectivos lógicos, conocimientos básicos sobre conjuntos como pertenencia, contenencia u operaciones, contradicción y tautología. En síntesis, los errores cometidos con mayor frecuencia por los alumnos fueron los siguientes: aprendizaje deficiente de hechos, capacidades y conceptos previos, de inferencias no válidas lógicamente y errores debidos a dificultades de uso del lenguaje matemático, los cuales claramente impiden que el educando pueda avanzar en la conceptualización de nuevos conocimientos matemáticos.

Esta investigación es muy importante en Educación Matemática, especialmente en la línea de formación de docentes investigadores, ya que además de analizar y reflexionar sobre los resultados obtenidos en el aula de clase, el profesor conoce y trata de solucionar las dificultades en el pensamiento lógico matemático de sus estudiantes, para hacer verdadera retroalimentación que permita superar las falencias en el aprendizaje y el desarrollo del pensamiento matemático a la hora de abordar problemáticas del contexto.

Referencias

Bogdan, R., & Taylor, S. J. (1987). Introducción a los métodos cualitativos de investigación: la búsqueda de significados. Paidós.

Carrillo Siles, B. (2009). Dificultades en el aprendizaje matemático.

Crespo, C. (2005). La importancia de la argumentación matemática en el aula. 24, 23- 29.

D´Amore , B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sbaragli, S. (2010). La didáctica y la dificultad en matemáticas. Magisterio.

D´Amore, B. (2006). Didáctica de la matemática. Magisterio.

Diaz, D. D., Palomino, J. A., & Primero, F. J. (2009). El lenguaje matemático y su implicación en el aprendizaje de esta disciplina https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/el-lenguaje-matematico-y-suimplicacion-en-el-aprendizaje-de-esta-disciplina/

Gordillo, A., & Restrepo, J. (2012). Comprensión lectora y concepciones de estudiantes universitarios sobre enunciados matemáticos. Revista del Instituto de Estudios en Educación Universidad del Norte, 17, 2- 23.

Espinoza Castaño, R. A., & David Serna, J. H. (2018). Dificultades en la argumentación que presentan algunos estudiantes de un curso de Fundamentos de Aritmética de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad de

Antioquia https://hdl.handle.net/10495/19122

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, M. (2010). Metodología de la investigación (Vol. Quinta editorial). McGRAW-HILL / INTERAMERICANA EDITORES, S.A.

Hernández Suárez, C. A., Prada Núñez, R., & Gamboa Suárez, A. A. (2017). Conocimiento y uso del lenguaje matemático en la formación inicial de docentes en matemáticas.

Revista investigación, desarrollo e innovación, 7(2), 287-299.

Jiménez Chaves, V. E. (2012). El estudio de caso y su implementación en la investigación.

Revista internacional de investigación en ciencias sociales, 8(1), 141- 150.

Mendoza Martínez, N. (2019). Esquemas de demostración utilizados al hacer demostraciones formales por estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste. Eprints repository software. http://up-rid.up.ac.pa/id/eprint/1823

Moreno, A., Marín, M. & Ramírez-Uclés, R. (2021). Errores de profesores de matemáticas en formación inicial al resolver una tarea de modelización. PNA 15(2), 109-136.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., y Inbar, S. (1987). An Empirical Classification Model for Errors in High School Mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, 18(1), 3- 14.

Muñoz Quevedo, J. M. (2002). Introducción a la teoría de conjuntos. Universidad Nacional de Colombia.

Radatz, H. (1979). Error Analysis in Mathematics Education. Journal for Research in Mathematics Education, 10(3), 163- 172.

Radillo, M., Nesterova, E., Ulloa, R., & Pantoja Rangel, R. (2005). Obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas relacionados con deficiencias en la traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático y viceversa. CiberEduca, 1- 12.

Rico, L. (1998). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez, & L. Rico (Ed.), En Educación matemática: Errores y dificultades de los estudiantes, resolución de problemas, evaluación, historia (pp. 69- 108). Una Empresa Docente.

Forma de citar este artículo: Soler Torres N. M, Jiménez Espinosa A. (2024). El Aprendizaje de Conceptos Elementales de Lógica y Teoría de Conjuntos, *Revista Voces y Realidades Educativas,* (11), pp._11-26.