Forma de citar este artículo: *Suárez Sotomonte, P., & Riveros Panqueba, C. F. (2019) "El pensamiento matemático en el aprendizaje del objeto derivada". Revista Voces y Realidades Educativas. Vol. 2 No. 3, 129-144.*

EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO EN EL APRENDIZAJE DEL OBJETO DERIVADA

MATHEMATICAL THINKING IN LEARNING THE DERIVED OBJECT

Suárez Sotomonte, Publio[1]
Riveros Panqueba, Cesar Fabián[2]

Recepción: 08/02/2019
Aceptación: 10/05/2019

Artículo de investigación

Resumen

La investigación tuvo el propósito de analizar y describir los procesos del pensamiento matemático en el aprendizaje de la derivada como razón de cambio, a partir de situaciones modeladas y simuladas en entornos virtuales diseñados en GeoGebra, con estudiantes de grado undécimo del Instituto Técnico Francisco Lucea de San Luis de Palenque, Casanare. La metodología de investigación adoptó el enfoque cualitativo, de tipo descriptivo-interpretativo, el cual permitió caracterizar de manera más profunda los aspectos que emergen de la implementación de los ambientes virtuales. Las actividades vivenciadas en el aula potenciaron el desarrollo de distintos sistemas de representación, el tratamiento y la conversión entre sus registros semióticos. Los resultados permitieron: desde la visualización, el análisis y la exploración de los ambientes virtuales, que los estudiantes comprendieran el objeto derivada, como razón de cambio, potenciando su pensamiento variacional y el trabajo con sistemas analíticos y algebraicos.

Palabras claves: derivada, razón de cambio, pensamiento matemático, pensamiento variacional, ambientes virtuales de aprendizaje.

[1]Dr. En Ciencias de la Educación. Docente Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia Catedrático Universidad Santo Tomas, Tunja pssuarez2002@hotmail.com
[2]Lic. En Matemáticas. Estudiante de Maestría en Educación matemática. Profesor de Matemáticas en Instituto Técnico Francisco Lucea de San Luis de Palenque, Casanare. cefary91@hotmail.com

Abstract

The research was intended to analyze and describe the processes of mathematical thinking in the learning of the derivative as a reason for change, from modeled and simulated situations in virtual environments designed in GeoGebra, with students of eleventh grade of the Francisco Lucea Technical Institute of San Luis de Palenque, Casanare. The research methodology adopted the qualitative, descriptive-interpretative approach, which allowed for a deeper characterization of the emerging aspects of the implementation of virtual environments. The activities experienced in the classroom enhanced the development of different systems of representation, treatment and conversion between their semiotic registers. The results allowed: from the visualization, analysis and exploration of virtual environments, students understood the derived object, as a reason for change, enhancing their variational thinking and working with analytical and algebraic systems.

Key words: derivative, reason for change, mathematical thinking, variational thinking, virtual learning environments.

Introducción

Uno de los retos en la enseñanza del análisis matemático en educación media es el aprendizaje del objeto matemático derivada, su definición, caracterización y formalización; partiendo de los diversos sistemas de representación, específicamente las nociones claves del cálculo diferencial. Pues al estudiante se le dificulta desarrollar competencias que le permitan identificar, interpretar, modelar y simular situaciones problemáticas de contexto, en donde subyace el cambio. Artigue (1995) expresa que, sí bien muchos estudiantes pueden aprender a realizar de forma mecánica cálculos de derivadas primitivas y resolver algunos problemas, se encuentran grandes dificultades para alcanzar una verdadera comprensión del concepto.

Una de las tendencias contemporáneas en el aprendizaje del cálculo infinitesimal es la incorporación de la tecnología y el uso educativo de internet para experimentar con diversos sistemas de representación del objeto derivada de una función univariada; por ejemplo, investigaciones hechas por Lupiáñez y Moreno (2001) evidencian que, con la implementación de aplicaciones especializadas en matemática, los estudiantes desarrollan una mejor comprensión de las nociones. Esto no quiere decir que el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (Tic) constituyen la solución a la problemática de las dificultades en el área; Gracia (2018) expresa que el uso de software educativo y todo lo relacionado con las herramientas informáticas estimulan al estudiante potencializando aspectos del pensamiento como la modelación, el razonamiento, la generalización y la abstracción, convirtiéndose en un buen mediador pedagógico, aportando una participación activa en el proceso de aprendizaje, que anteriormente no se tenía, cuando el docente desarrollaba su clase de forma tradicional (Cardona, 2012).

La investigación pretendió analizar los procesos del pensamiento matemático del objeto derivada a partir de situaciones problemáticas de contexto, modeladas y simuladas en entornos virtuales elaborados con el programa GeoGebra. Se enfatizó en el pensamiento variacional, que contextualiza el estudio de la derivada, formulando actividades articuladas desde la variación y el cambio, mediadas por ambientes virtuales, promoviendo el manejo de distintos sistemas semióticos de representación que conllevan a un mejor entendimiento de las nociones matemáticas (Duval y Sáenz, 2016).
Es necesario impulsar un cambio en el proceso de enseñanza, promoviendo prácticas dinámicas y significativas para los estudiantes, que propicien el desarrollo de su pensamiento matemático. En la actualidad, las tecnologías juegan un papel importante, puesto que, se han creado aplicaciones informáticas especializadas en la visualización dinámica de objetos matemáticos, permitiendo un cambio en cuanto a los procesos de enseñanza y las estrategias metodológicas de los docentes y sus posibilidades de reflexión sobre su práctica, con miras a posibilitar la visualización y simulación de situaciones problemáticas y así, desarrollar las competencias de razonamiento matemático respecto al pensamiento variacional y los sistemas analíticos (Vasco, 2003).

La investigación aplicada en el Instituto Técnico Francisco Lucea del municipio de San Luis de Palenque Casanare, se orientó a indagar sobre la pregunta ¿Cómo apropian los estudiantes de grado undécimo la derivada como razón de cambio a partir de situaciones modeladas y simuladas en entornos virtuales?

Contenido

Referentes teóricos

Diversas investigaciones abordan el pensamiento matemático, desde enfoques cognitivos, críticos y antropológicos; inicialmente se hizo un acercamiento a la definición del pensamiento matemático desde el punto de vista de la cognición, haciendo especial referencia al pensamiento variacional que se utiliza al momento de analizar, modelar y solucionar situaciones problemáticas de la derivada como razón de cambio; adicionalmente, se expone en esta sección algunos aspectos precisos y particulares de los fundamentos de la teoría de los registros de representación semiótica y la importancia e implementación de las Tic en los procesos de enseñanza, que han permitido un acercamiento a la comprensión del objeto derivada y en particular la matemática del cambio.

Pensamiento matemático

Existen diversas formas de ver y entender el Pensamiento Matemático, inicialmente considerando la taxonomía formulada en el currículo colombiano de matemáticas para educación básica y media, que encierran toda actividad matemática. En la aritmética, el pensamiento numérico; en la geometría, el pensamiento espacial; en el álgebra y el cálculo, el pensamiento métrico y el pensamiento variacional; en la probabilidad y estadística, el pensamiento aleatorio (Colombia-MEN, 2003). Estos cinco tipos de pensamientos se relacionan entre sí puesto que, al solucionar un problema matemático, el estudiante puede plantear diferentes formas de resolverlo, poniendo en práctica los procesos de aprendizaje a partir de la activación de las diferentes formas de pensar matemáticamente.

Por otro lado, Cantoral et al. (2005) interpreta el pensamiento matemático como "una reflexión espontánea que los matemáticos realizan sobre la naturaleza de su conocimiento y sobre la naturaleza del proceso de descubrimiento e invención en matemáticas". Otra visión desde el contexto colombiano expresa que el pensamiento matemático se desarrolla en todos los seres humanos mediante la cotidianidad en sus múltiples tareas diarias, especialmente en aquellas donde realiza sistematización y contextualización del conocimiento matemático según los Estándares Básicos de Competencia en Matemática (2006). Adicionalmente, Mason, Burton y Stacey (1982) expresan en su libro "Thinking Mathematically" que: "el pensamiento matemático es un proceso dinámico que permite el aumento de la complejidad de las ideas que podemos manejar extendiendo nuestra capacidad de comprensión". (p.17)

En la investigación, se asume el pensamiento matemático, según lo plantea Cantoral et al. (2005) como una manifestación de la actividad humana donde se generan: Los procedimientos, explicaciones, escrituras y formulaciones verbales que el estudiante construye alrededor de cualquier actividad matemática, motivado por descifrar los mecanismos propios de esta, donde la cultura y el medio contribuyen en la formación de los pensamientos matemáticos. (p.18)

Por último, el pensamiento matemático es: "una construcción del sujeto que se desarrolla en su diario vivir y su entorno socio cultural"; por tal razón es de vital importancia que en los colegios se propicien actividades en donde cada estudiante desarrolle su propio pensamiento matemático a través de la mediación entre el conocimiento del docente y la interacción con los medios didácticos utilizados en clase, propiciando el desarrollo de capacidades cognitivas para la construcción de nuevos conocimientos.

Se consideran importantes para la presente investigación los procesos de particularización, conjeturación, generalización y convencimiento como procesos característicos del pensar matemáticamente (Mason et Alter, 1982).

Pensamiento variacional

En el estudio del cálculo diferencial está muy presente la variación y el cambio, convirtiéndolo en una herramienta fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático, ya que permite modelar, predecir y cuantificar la variación y el cambio en diferentes fenómenos (MEN, 2003). Sin embargo, esta perspectiva ha perdido relevancia y se ha interesado por los procesos de construcción y el desarrollo algorítmico, lo que convierte al estudio del cálculo en algo tedioso y de poco agrado por los estudiantes. Distintas investigaciones, exponen que la clase de cálculo diferencial, debe estar dirigida especialmente a que los estudiantes trabajen con ideas de variación y modelación de fenómenos de cambio; en este sentido es indispensable el desarrollo de su pensamiento variacional (Cantoral y Farfán, 2000; Cantoral y Reséndiz, 2003).

La problemática radica en que a la hora de abordar situaciones problemáticas del pensamiento variacional en educación media desde un enfoque tradicional, sólo se enfatiza en la definición de funciones univariadas, explorando sus gráficas en el plano cartesiano, sugiriendo que los estudiantes memoricen los tipos de fórmulas más usuales. Estas concepciones más bien se convierten en obstáculos epistemológicos y didácticos al dominio del pensamiento variacional. Según los Lineamientos Curriculares el pensamiento variacional: "se ocupa del reconocimiento de la variación y el cambio en diferentes contextos" del mismo modo con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos. Vasco (2003), expresa el pensamiento variacional como:

> *(...). Una manera de pensar dinámica que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad. (p.63)*

Su propósito fundamental apunta a:

> *"tratar de modelar patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad", además conlleva a que el estudiante pueda "generar modelos mentales, determinar patrones de variación y poder expresarlo en diferentes sistemas simbólicos de representación". (p.63)*

Teoría de los registros semióticos

Un problema de investigación actual en Educación Matemática aborda el papel de las representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas elementales. La experimentación de los estudiantes con diversas representaciones constituye el primer paso para acercarse a un objeto matemático y juegan un papel importante en los procesos de aprendizaje, ya que pueden expresar y exteriorizar sus concepciones e ideas. Según D´Amore (2006) "todo concepto matemático se ve obligado a servirse de representaciones, dado que no se dispone de "objetos" para exhibir en su lugar o en su evocación". Es indispensable que las concepciones de los estudiantes se expresen en diferentes representaciones y que exista una relación entre ellas. Duval y Sáenz (2016) expresa que "el uso de varias representaciones semióticas de un objeto matemático facilita la comprensión del concepto", dándole importancia a las construcciones mentales, a los procesos cognitivos en la formación de conocimiento y al mismo tiempo aumentado la capacidad del pensamiento matemático y por lo tanto el conocimiento del objeto.

Duval (citado en Vrancken, 2011; p.41) formula algunas hipótesis que permiten fundamentar su teoría:

La comprensión no está ligada estrictamente a los contenidos matemáticos, sino a la naturaleza de las actividades y de los desempeños que se exigen. Es fundamental el estudio del funcionamiento cognitivo implicado por el aprendizaje requerido.

No hay conocimiento que pueda ser movilizado por un sujeto sin una actividad de representación.

El pensamiento humano se caracteriza por la movilización de muchos sistemas de representación. En matemática, son los sistemas semióticos los principales componentes de la arquitectura cognitiva que permiten al individuo entender esta disciplina.

Duval, como uno de los referentes en el campo de la representación semiótica, se interesó por analizar los problemas de comprensión en el aprendizaje de la matemática, partiendo que las representaciones, tomadas como "signos que se producen a partir de reglas, permitiendo la descripción de un proceso o fenómeno". Para Font (2009) "los conceptos matemáticos, se representan por sistemas matemáticos de signos y son considerados en el mundo real." Entonces, se entiende como registro semiótico "al conjunto de signos para representar una idea o un objeto matemático"; adicionalmente, debe cumplir "con tres características de ser identificable, permitir el tratamiento y posibilitar la conversión" (Duval, 1998).

Gruszycki, Oteiza, Maras, Gruszycki, & Balles (2012) consideran que la característica identificable:

> *(...) se refiere a reconocerse como una representación de un registro dado, el tratamiento es una acción sobre la representación interna a un registro. Asimismo, entre diferentes registros de representación se pueden realizar conversiones, que son transformaciones de una representación en otra que pertenece a otro registro diferente al de la primera. Una operación de conversión puede ser la de traducir información tabular sobre una función, en una gráfica. (p.2170)*

Según Duval (1999) el tratamiento es "la transformación de la representación dentro del mismo registro"; de modo qué a partir de éstas, se obtengan "otras representaciones que se puedan establecer como una ganancia de conocimiento refiriéndose a la transformación interna de un registro"; los tratamientos que se pueden realizar "dependen principalmente de las posibilidades y reglas que brinda el sistema de representación" (p. 72)

Respecto a las conversiones "son transformaciones de representación que consisten en cambiar un registro sin cambiar los objetos denotados", conservando parte de su significado a la representación inicial y al mismo tiempo, denotando otros significados, por ejemplo, "pasar de la notación algebraica para una ecuación a su representación gráfica, pasar del enunciado de una relación en lenguaje natural a su notación usando letras" (p. 72). Duval y Sáenz (2016) expresan que "La conversión es más compleja que el tratamiento porque cualquier cambio de registro requiere primero que entre dos representaciones cuyos contenidos con frecuencia no tienen nada en común, se reconozca al mismo objeto representado" (p.75).

En la actividad matemática, especialmente en el cálculo diferencial está presente el cambio constante de una representación a otra, dado que existen diferentes formas de expresar y representar un objeto matemático. Cada representación tiene características diferentes según el sistema de reglas para su creación, pero siempre el objeto representado se mantiene invariante. (Duval, 2008).

Tecnología en la educación

La incorporación en los procesos de enseñanza y aprendizaje ha generado un impacto en la educación matemática e impulsado un cambio favorable en las estrategias metodológicas de aula, las cuales han facilitado un mayor entendimiento en las diferentes áreas del conocimiento, pues permiten trabajar con diversas representaciones de un mismo objeto. En investigaciones donde se implementan diferentes aplicaciones informáticas de matemáticas como mediadoras del aprendizaje, se evidencian grandes aportes al aprendizaje del área; por otro lado, surgen dificultades en la implementación de las Tic en el aula de matemáticas, por ejemplo respecto a la competencia digital de los docentes, la alfabetización computacional de los educandos y el acceso a los recursos tecnológicos en las instituciones, lo cual genera que no son la panacea que solucionaría los problemas de la educación matemática. Moreno (2014) menciona que el uso de la tecnología juega papel importante en el desarrollo de habilidades matemáticas, es decir, "la tecnología ayuda a que el estudiante no sea solo un espectador o receptor del conocimiento, sino que pase a ser un ente activo vinculado directamente con el que hacer matemático" (p. 10).

Ambiente virtual de aprendizaje

Una interpretación que se adopta en la investigación sobre los ambientes virtuales de aprendizaje se basa en que: "es el conjunto de entornos de interacción, sincrónica y asincrónica, donde, con base en un programa curricular, se lleva a cabo el proceso enseñanza-aprendizaje, a través de un sistema de administración de aprendizaje" (López, Rayón, Escalera y Ledesma, 2002, p.6). Por otro lado, Vidal, Llanusa, Diego y Vialart (2008) mencionan que los entornos virtuales de aprendizaje se centran en los procesos del estudiante, permitiéndole construir su propio conocimiento, basado desde su propia expectativa y necesidades del contexto. Lo definen como "un proceso o actividad de enseñanza aprendizaje que se desarrolla fuera de un espacio físico, temporal y a través de Internet, ofrecen diversidad de medios y recursos para apoyar la enseñanza". Finalmente, Moreno y Montoya (2015) lo definen como "un sistema de software diseñado para facilitar la gestión de cursos, sean completamente a distancia o como complemento de cursos presenciales" (p.5).

Adicionalmente, en el desarrollo de este trabajo, se considera adecuado tomar la definición dada por Pantoja y Zwierewicz (2008):

> *Espacios de aprendizaje dominados por las TIC que permiten una simulación en tiempo real de las condiciones que se dan en un aula presencial y que ofrecen condiciones técnicas para el desarrollo de estrategias interactivas y la consecuente construcción colaborativa del conocimiento, aunque en este caso docente y discente se pueden encontrar a miles de kilómetros de distancia. (p. 285)*

A medida que las Tic fueron ganando un espacio importante en la educación, se fueron creando e implementado programas especializados en la enseñanza y aprendizaje de la matemática básica, con propósitos de visualización, representación gráfica, operaciones numéricas y cálculo simbólico, permitiendo la representación dinámica de distintas concepciones y agregando un potencial interés del estudiante por el aprendizaje. En la educación matemática, se configuró la geometría dinámica con la creación y uso educativo de aplicaciones como GeoGebra, Cabri Geometry, Cinderela, entre otras, complementados con el software de cálculo simbólico, como Derive, Mathematica o Matlab, los cuales propiciaron factores positivos en el desarrollo del pensamiento variacional, la modelación y simulación de situaciones problemáticas, por parte los educandos, con orientaciones del docente respecto al uso de los ambientes virtuales. En esta investigación, se pensó e implementó el software GeoGebra como mediador y herramienta para la creación de los ambientes virtuales de aprendizaje de la derivada como razón de cambio.

Metodología

Teniendo en cuenta que se pretende analizar los procesos del pensamiento matemático al abordar el aprendizaje del objeto derivada, a partir de situaciones modeladas y simuladas en entornos virtuales, con estudiantes de grado undécimo. Se adopta el enfoque de investigación cualitativo, de tipo descriptivo-interpretativo, permitiendo un acercamiento más global y comprensivo a los entornos escolares. Gallardo (2017) menciona que "la investigación cualitativa no estudia la realidad en sí, sino cómo se construye la realidad. Esto implica estudiarlo desde el punto de vista de las personas y enfatizar el proceso de comprensión" (p.22). Dando la posibilidad al investigador de observar y analizar el fenómeno de estudio, aportando mayor información descriptiva y así comprender el contexto sobre lo que se está investigando.

La investigación se desarrolló en el Instituto Técnico Francisco Lucea del municipio de San Luis de Palenque, Casanare, se consideró como unidad de análisis a los estudiantes de grado undécimo de la institución, el grado cuenta con un total de veinte (20) estudiantes con edades desde los catorce (14) a diecisiete (17) años de edad.

Para poder alcanzar los objetivos establecidos se determinaron tres etapas, en la primera etapa Contextualización y Diseño se elaboró un diagnóstico sobre concepciones previas y se elaboraron los instrumentos como guías de trabajo y los ambientes virtuales de aprendizaje, los cuales fueron pensados para incorporar diferentes tipos de representación como: verbal, gráfico, numérico y analítico, para poder llegar a una descripción e interpretación más profunda del fenómeno a estudiar; en la segunda etapa de Desarrollo se implementaron los ambientes virtuales, en seis (6) sesiones de dos (2) horas cada una, desarrolladas dentro del plan de área del docente; en la tercera etapa de Construcción de Sentido de la Experiencia, se procesó, analizó e interpretó la información y resultados obtenidos, teniendo en cuenta las categorías y subcategorías de análisis (véase Tabla 2).

Elaboración del instrumento y ambientes virtuales

La investigación partió de una actividad experimental, considerada como un diagnóstico sobre concepciones previas en relación con algunos aspectos como: la modelación, simulación, argumentación y representación gráfica del comportamiento de un cuerpo que experimenta un movimiento rectilíneo uniforme, mostrándoles una situación relacionada con la variación y el cambio de un fenómeno físico; la práctica experimental se desarrolló mediante el Módulo para Experiencias Mecánicas y fue utilizado gracias al apoyo del MSc. Simón Bolívar Cely.

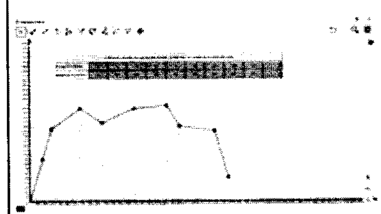
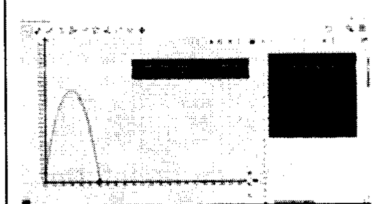
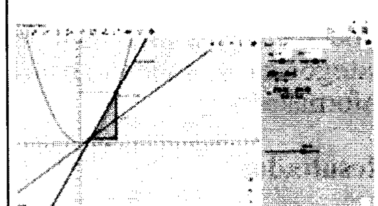
Posteriormente, se empezó a elaborar y validar los instrumentos que se utilizaron en la recolección de la información de la práctica de aula. Dichos instrumentos consistieron en la producción de cinco ambientes virtuales, considerando el tratamiento del objeto derivada mediante situaciones problemáticas, donde se evidenciaba el cambio. Además, cada ambiente tenía unas actividades para desarrollar de forma escrita con relación a la observación, manipulación y análisis de lo planteado por el ambiente.

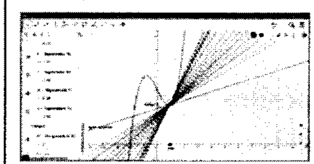
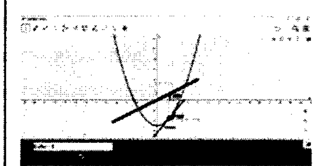
Aplicación de los ambientes virtuales

En la etapa de Desarrollo se aplicaron los instrumentos que permitieron el análisis de la apropiación del objeto derivada como razón de cambio, a partir de situaciones modeladas y simuladas en entornos virtuales; se desarrollaron en cinco (5) sesiones de clase de dos (2) horas cada una. Se presenta a continuación un cuadro con los objetivos y dibujos dinámicos propuestos para cada ambiente virtual.

Tabla 1.

Propósitos planteados para cada una de las sesiones - fuente elaboración propia.

AVA	Objetivos	Dibujo dinámico
Representación gráfica a partir de registro tabular	Representar coordenadas de un registro tabular a un registro gráfico. Analizar problemas físicos que relacionan el desplazamiento con respecto al tiempo. Calcular la velocidad media en distintos intervalos de tiempo.	
Representación gráfica a partir de registro algebraico	Conocer la razón de cambio promedio dando solución a la expresión de razón de cambio. Analizar un registro gráfico que modela el comportamiento de un cuerpo que es lanzado parabólicamente. Plantear el cálculo de la velocidad instantánea de un cuerpo que sigue una trayectoria parabólica.	
Interpretación geométrica de la pendiente de la recta tangente.	Encontrar la relación entre la velocidad media y la pendiente de la recta secante. Determinar la relación entre la velocidad instantánea y la pendiente de la recta tangente. Describir en lenguaje natural el comportamiento cuando h se aproxima a cero.	

Aproximación de rectas secantes.	Describir el lugar geométrico del triángulo que se forma entre ΔX, ΔY y la recta secante. Adoptar la definición de límite como fundamento de la noción de derivada. Formalizar la noción de razón de cambio instantánea.	
Caracterización de la función derivada.	Encontrar el lugar geométrico correspondiente a la función derivada a partir del desplazamiento del punto en el cual se calcula la derivada puntual. Plantear el cálculo de la derivada de una función con el paso al límite. Determinar la expresión algebraica de la derivada de una función.	

Análisis de la información

El análisis de la información y la consolidación del informe de la investigación, se realizó teniendo en cuenta las categorías y subcategorías establecidas para la descripción de los procesos del pensamiento matemático emergentes en el desarrollo de las actividades problemáticas mediadas por los ambientes virtuales. Se describe en este artículo de forma detallada la descripción e interpretación de la solución de algunas actividades propuestas, asentando algunas intervenciones de los estudiantes y del docente que son relevantes para el análisis y la caracterización de los procesos del pensamiento matemático. Se presenta a continuación las categorías y subcategorías para el análisis e interpretación de la información.

Resultados

Actividad 1: Representación gráfica a partir de registro tabular
La altura de un globo en función del tiempo se describe por medio de la siguiente tabla:

Tiempo (min)		0	1	4	6	9 0	1 2	1 6	1 7
Altura (m)		4	1 7	1 2	2 2	2 0	2 8	1 8	1 2

En relación con el inciso a) Realice un gráfico donde represente la altura del globo en función del tiempo, se pudo observar a priori, que algunos de los estudiantes tienen dificultades en las unidades de medida que intervienen en el problema y en el patrón de unidad al momento de realizar el gráfico. A pesar de la dificultad, la mayoría pudo realizar de manera correcta el registro gráfico de la situación planteada, evidenciando el tratamiento y la conversión de la representación. Se muestra el registro grafico que tiende a ser común en todos los estudiantes.

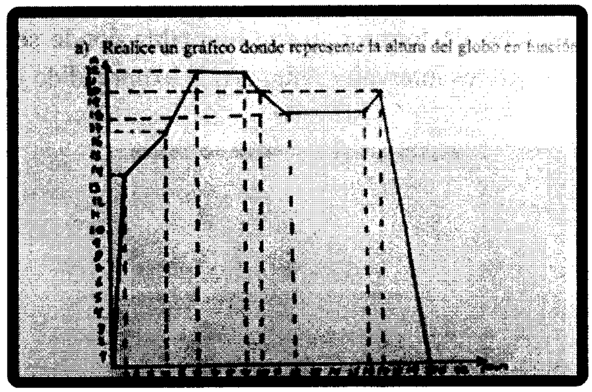


Figura 1. Solución por un estudiante de la conversión del registro tabular a registro gráfico

La actividad propone una comprensión del gráfico que se genera a partir de la interpretación del registro tabular, estudiando y caracterizando la velocidad media en distintos instantes. Se construyó una red que muestra la codificación de los resultados de los estudiantes.

En el análisis de los datos, se establece que los estudiantes por medio del pensamiento visual, determinaron la unidad de medida de las variables que interactúan en el problema. Considerando como variable independiente el tiempo en minutos y la variable dependiente, la altura en metros. Mediante lenguaje gráfico identificaron fácilmente la altura máxima del globo y el tiempo total del desplazamiento; del mismo modo, por medio de la observación del gráfico determinaron el desplazamiento del cuerpo con relación a la altura, puesto que en distintos intervalos, realizaron una aproximación de la velocidad media, concluyendo que el globo pasa por varios episodios donde su velocidad es creciente, decreciente o cero. Determinaron finalmente, mediante lenguaje natural, la descripción del movimiento del cuerpo en toda su trayectoria.

Actividad 2: Representación gráfica a partir de registro algebraico

La trayectoria de un cuerpo que fue lanzado verticalmente hacia arriba está dada por la ecuación $f(x)=-2x^2+12x+2$ en metros, donde x se mide en segundos.

Algunos determinaron que mediante la manipulación de los puntos podrían obtener el valor de x_1 y x_2 y al mismo tiempo $f(x_1)$ y $f(x_2)$; por otro lado, como el ambiente suministraba la expresión de la función, algunos estudiantes optaron por reemplazar los valores y determinar el resultado algebraicamente. Se pudo percibir que el ambiente presentado, facilitó la identificación de $f(x_1)$ y $f(x_2)$ para cada x_1 y x_2 ; esto permitió al estudiante analizar la variación de una función, desarrollar un modelo mental de la covariación entre las magnitudes y finalmente observar que la velocidad no es constante, experimentando un cambio en todo su trayecto. Lo anterior permitió completar de forma correcta una tabla donde se les pedía las razones de cambio en distintos intervalos, afianzando lo aprendido en la actividad anterior.

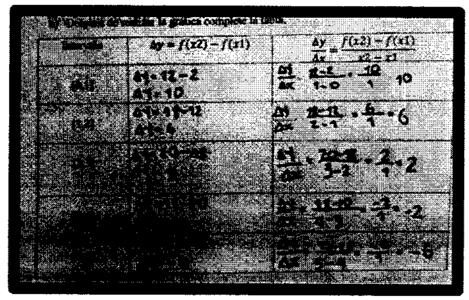


Figura 1. Solución por un estudiante de la conversión del registro tabular a registro gráfico

En el inciso c) ¿Cuál es la velocidad del cuerpo a los cuatro (4) segundos de haber iniciado su movimiento?

Se observó que la mayoría de los estudiantes no expresaron la respuesta correcta. Se presentaron dificultades, puesto que dieron solución de la misma forma que la velocidad promedio tomando como $x_1=0$ $x_2=4$ y a $f(x_1)=2$ y $f(x_2)=18$ dando como respuesta $v=\frac{18-2}{4-0}$ 4 m/s ; ningún estudiante consideró una velocidad negativa. Por otro lado, el 10% (2 estudiantes) plantearon la misma noción de la velocidad promedio, pero en este caso, reduciendo el increment ΔX en [3.9,4,1] de tal manera que los cuatro (4) segundos estuviera dentro del intervalo. Es interesante como los estudiantes desarrollaron la idea de la aproximación del límite de manera intuitiva, sin haberles explicado el tema.

Actividad 3: Interpretación geométrica de la pendiente de la recta tangente

Se ha dibujado una función $f(x) = \frac{1}{2} X_2$ y una recta tangente a la gráfica, adicionalmente se tienen dos coordenadas *a* y *b* sobre el eje x. Observe y analice las siguientes situaciones:

En el inciso f) Describa que sucede cuando *b* se acerca cada vez más a *a*

Se pudo determinar que el ambiente virtual proporciona las herramientas necesarias para comprender y determinar la pendiente de la recta secante en distintos intervalos; es importante destacar que los intervalos entre *a* y *b* se hacían cada vez más pequeños a tal punto de que ΔX se aproxima a cero, se convierta en la pendiente de la recta tangente.

Se determinó que el 60% (12 estudiantes) describen que cuando h tiende a cero, es cuando b se acerca al valor de a, determinando mediante lenguaje natural que la recta secante se acerca a la recta tangente, a tal punto de que cuando $b = a$ las rectas se sobreponen. Algunos mencionan que el valor de la pendiente cambia y se va acercando a un mismo valor. Por otro lado, el 25% (5 estudiantes) describieron que, cuando *b* se acerca al valor de *a*, el valor de la pendiente disminuye, además que la recta tangente no cambia de posición como lo hace la secante. Tres de ellos identificaron gráficamente el triángulo que se forma en la interpretación geométrica de la pendiente y comentaron que, el triángulo se hace cada vez más pequeño, a tal punto de desaparecer. Finalmente, el 15 % (3 estudiantes) describieron que las coordenadas de los putos *A* y *B,* se van acercando hasta que se forma una sola coordenada.

Actividad 4: Aproximación de rectas secantes

En el applet se muestra la gráfica de una función, adicionalmente un punto A y B, que se pueden mover sobre la gráfica.

En el inciso c) ¿Cuál será el límite de la pendiente de la recta secante, cuando la h tiende a cero?
Al preguntarles por la incorporación del límite, trataron de buscar una respuesta numérica, solo el 35% (7 estudiantes) concluyeron que, cuando se incorpora el límite a la pendiente, es porque el valor de h tiende a cero, y la expresión queda: $\lim_{h \to 0} \frac{f(X+h)-f(x)}{h}$ siendo una razón de cambio instantánea, para cualquier punto en la función, o el valor de la pendiente de la recta tangente, en un punto. Se evidencia que los estudiantes tuvieron dificultad en las preguntas descriptivas usando el lenguaje natural, se presentó menos participación, bajó un poco el interés y la motivación por el aprendizaje de dicha temática.

Actividad 5: Caracterización de la función derivada

En el applet se muestra un punto *A* que tiene como abscisa el valor de *x*, y como ordenada, el valor de su derivada

En el inciso c) Caracterice la función derivada
Se determinó que la mayoría de los estudiantes expresaron aspectos importantes de la observación dinámica del ambiente. Entre sus respuestas se encontró que la función derivada es una función lineal, creciente y pasa por el origen; algunos mencionaron que es secante a la función inicialmente dada. Por otro lado, algunos estudiantes caracterizaron correctamente la función inicial $f(X) = 0.25X - 5$, resaltando algunas características importantes como, que es una función cuadrática, que abre hacia arriba y con vértice en (0,-5); aunque sus características son ciertas, no dan respuesta a la pregunta inicial.
En el inciso d) determine la derivada de la función.

Se pretende que los alumnos deduzcan la derivada mediante la definición de límite, conjeturando el tratamiento en un lenguaje algebraico con lo aprendido en las actividades anteriores. Trabajando la noción derivada desde un enfoque variacional, se requiere que los estudiantes reconozcan la necesidad de involucrar el paso al límite para encontrar la razón de cambio instantánea, la pendiente de la recta tangente a la gráfica y la expresión algebraica de la derivada.

En la solución de la derivada se determinó que un 100% de los estudiantes entendieron que, se tenía que utilizar el paso a límite de la función, cuando h tiende a cero $\lim_{h \to 0} \frac{f(X+h) - f(x)}{h}$ En el tratamiento algebraico, se observó que el 60 % (12 estudiantes) la calcularon correctamente llegando a expresión $\lim_{h \to 2} \frac{0,25(x+h)^2 - 5 - (0,25X^2 - 5)}{h} = 0,5X$ concluyendo que la función derivada es $f(x) = 0,5x$. El otro 40% (8 estudiantes) resolvieron algunas operaciones pero tuvieron dificultades en solucionar el producto notable $[\frac{1}{4}(x+h) - 5]$ cuatro de estos estudiantes, que si resolvieron el producto notable, no realizaron la distribución del factor $\frac{1}{4^2}$ llegando a un solución incorrecta, para el cálculo de la derivada de la función dada.

Conclusiones

Se puede afirmar que, a lo largo de las actividades contenidas en los ambientes virtuales elaborados, surgieron aspectos importantes que fueron expresados por los estudiantes usando los diferentes registros semióticos de representación, entre los cuales se trabajaron el lenguaje natural, tabular, gráfico, numérico y algebraico. Se evidenció que aproximadamente un 70% de los estudiantes mostraron un avance en el desarrollo de su pensamiento matemático, pues exploraron los sistemas de representación ejemplificado en diversos casos (particularización), formulando hipótesis respecto a las relaciones geométricas, métricas y analíticas, respecto a la derivada como razón de cambio (conjeturación), detectando patrones y regularidades relacionados con invariantes en diversos casos particulares (generalización), y argumentando correctamente los procesos de descripción de fenómenos físicos relacionados con el movimiento y la velocidad (convencimiento).

Respecto al desempeño de los estudiantes en las actividades propuestas y evaluadas en el desarrollo de los seis (6) ambientes en el aula, se pueden mencionar de manera particular los siguientes aspectos relevantes:

- La conversión entre los registros tabulares y coordenadas cartesianas en el plano se facilitó, encontrándolos como expresiones equivalentes.
- Detectaron las características de la velocidad media en distintos intervalos, algunos determinándola sin sus unidades correspondientes (metros por segundo).
- La descripción e interpretación de los fenómenos físicos, en relación al movimiento y la velocidad surgió de manera natural al analizar, explorar y manipular los ambientes virtuales.
- La simulación gráfica y el uso de las herramientas del aplicativo GeoGebra, permitió interpretar la recta tangente, como aproximación de rectas secantes.
- La conversión entre el registro gráfico y algebraico se facilitó, permitiendo determinar la expresión del límite de la pendiente de la recta secante, cuando h tiende a cero.
- La deducción de derivada mediante la definición de límite, fue desarrollada correctamente, evidenciando el tratamiento.
- La modelación como herramienta en solución de las situaciones problemáticas permitió que se detectaran aspectos geométricos y algebraicos invariantes en las actividades, mediante el movimiento en las figuras.

La visualización dinámica de los ambientes fortaleció en cada uno de los estudiantes el pensamiento visual, identificando fácilmente el comportamiento de algunos factores móviles presentados en los ambientes tales como las rectas secantes, la recta tangente, los puntos sobre la función definida y los incrementos Δx y Δy, permitiendo expresar mediante diferentes sistemas de representación la solución de las situaciones problemáticas planteadas en cada una de las actividades.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. Ingeniería didáctica en educación matemática, 1, 97-140.

Cantoral, R., & Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. Epsilon Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática, 42(14), 353-372.

Cantoral, R., & Reséndiz, E. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6(2), 133-154.

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., Alanís, J., Rodríguez, R., & Garza, A. (2005). Desarrollo del pensamiento matemático. México: Trilla.

Cardona Aguirre, R. (2012). Una propuesta para la enseñanza de la derivada como razón de cambio a estudiantes de grado undécimo. (Tesis de maestria). Universidad Nacional de Colombia, Bogota.

D'Amore, B. (2006). Didáctica de las matemáticas. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.). Investigaciones en Matemática Educativa.

Duval, R. (1999). Semiósis y pensamiento humano. Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. Semiotics in mathematics education, 39-61.

Duval, R., & Sáenz-Ludlow, A. (2016). Comprensión y aprendizaje en matemáticas : perspectivas semióticas seleccionadas. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Font, V. (2009). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. Colección Digital Eudoxus(11), 1-34.

Gallardo, E. E. (2017). Metodología de la Investigación: manual autoformativo interactivo. Huancayo: Universidad Continental.

Gracia Obando, G. (2018). Potenciando pensamiento variacional y uso de sistemas algebraicos con Geogebra. (Tesis de maestria). Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales, Manizales.

Gruszycki, A. E., Oteiza, L. N., Maras, P. M., Gruszycki, L. O., & Balles, H. A. (2012). GeoGebra y los sistemas de representación semióticos. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C, 27, 2169-2176.

López Rayón, A. E., Escalera, S., & Ledesma, R. (2002). Ambientes virtuales de aprendizaje. Instituto Politécnico Nacional. Mexico, DF.

Lupiáñez Gómez, J., & Moreno, L. (2001). Tecnología y Representaciones Semióticas en el Aprendizaje de las Matemáticas. Granada: Editorial Universidad de Granada.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). Thinking mathematically . Harlow.

Ministerio de Educacion Nacinal. (1998). Lineamientos curriculares. Santafé de Bogota.

Ministerio de Educacion Nacional . (2003). Estándares Básicos de Competencias . Santafé de Bogotá .

Moreno, A. (2014). Las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje. (E. Cacheiro, Ed.) Educación y tecnología: estrategias didácticas para la integración de las TIC, 8-23.

Moreno, C. J., & Montoya, G. L. (2015). Uso de un entorno virtual de aprendizaje ludificado como estrategia didáctica en un curso de pre-cálculo: Estudio de caso en la Universidad Nacional de Colombia. RISTI - Revista Ibérica de Sistemas e Tecnologias de Informação(16), 1-16.

Pantoja, A., & Zwierewicz, M. (2008). Procesos de orientación en entornos virtuales de aprendizaje. Revista Española de Orientación y Psicopedagogía, 19(3), 282-290.

Vasco, C. E. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. Anaiseletrônicos do CIAEM–Conferência Interamericana de Educação Matemática, 9. Blumenau.

Vidal Ledo, M., Llanusa Ruiz, S., Diego Olite, F., & Vialart Vidal, N. (2008). Entornos virtuales de enseñanza-aprendizaje. Educación Médica Superior, 22(1), 1-9.

Vrancken, S. (2011). la construcción de la derivada desde la variación y el cambio articulando distintos sistemas de representación. (Tesis de maestría). Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina.

Forma de citar este artículo: Suárez Sotomonte, P., & Riveros Panqueba, C. F. (2019) "El pensamiento matemático en el aprendizaje del objeto derivada". Revista Voces y Realidades Educativas. Vol. 2 No. 3, 129-144.