



LO PENDIENTE DE LA PENDIENTE

THE SLOPE OF THE SLOPE

*Publio Suarez Sotomonte¹
Edgar Rolando Berdugo Cely²*

Recepción: 12/01/2021
Aceptación: 27/04/2021
Artículo de investigación

Resumen

Algunas investigaciones han centrado su interés en la conceptualización sobre el objeto matemático *pendiente*, relacionando varias nociones desde la geometría y el cálculo; también, se consideran los Estándares del Ministerio de Educación Nacional, MEN (2006) y las representaciones semióticas, ya que estas son un factor fundamental en el aprendizaje del objeto matemático *pendiente*, por lo cual se analiza la forma como influyen en su aprendizaje, en una unidad de análisis, conformada con estudiantes de grado décimo de la ciudad de Tunja. Mediante un enfoque cualitativo y el análisis, a través de la actividad cognitiva según Duval (1999), y el diseño de talleres que involucran los registros semióticos: gráfico, algebraico y lenguaje natural, se encuentra que algunos jóvenes presentan dificultades, especialmente en la modelación de situaciones cotidianas o disciplinares, así mismo no hay coherencia en la transformación entre registros y representaciones semióticas, lo que impide que el estudiante logre una comprensión y la aplicación de la noción de *pendiente*, la cual

- 1 Doctor en Ciencias de la Educación, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Profesor, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Grupo de Investigación PIRÁMIDE en Educación Matemática. psuarez2002@hotmail.com
- 2 Estudiante de Maestría en Educación Matemática, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Docente, Secretaria de Educación de Boyacá. rolandoberdugo@hotmail.com



se evidencia en la fijación de la imagen en el aspecto gráfico de la tangente del ángulo de inclinación del lugar geométrico recta.

Palabras clave: Representaciones semióticas en matemáticas, la pendiente y sus representaciones semióticas.

Abstract

Some research has focused its interest on the conceptualization of the *pending* mathematical object, relating various notions from geometry and calculus, the standards of the National Ministry of Education, MEN (2006) and semiotic representations are also considered, since these are a factor fundamental in the learning of the *pending* mathematical object, which is why the way they influence their learning, is analyzed in an analysis unit made up of tenth grade students from the city of Tunja. Through a qualitative approach and analysis through cognitive activity according to Duval (1999), and the design of workshops that involve semiotic registers: graphic, algebraic and natural language, it is found that some young people present difficulties, especially in the modeling of everyday situations or disciplinary, likewise there is no coherence in the transformation between records and semiotic representations, which prevents the student from achieving an understanding and application of the notion of *pending*, which is evidenced in the fixation of the image in the graphic aspect of the tangent of the inclination angle of the straight locus.

Keywords: Semiotic representations in mathematics, the slope and its semiotic representations.



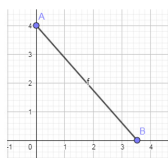
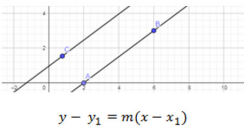
Introducción

El objeto matemático *pendiente* es abordado en la educación básica secundaria en el grado noveno, y tal como lo contemplan los Estándares del MEN (2006), algunas de las competencias básicas en matemáticas, que el estudiante debe adquirir, en la identificación y utilización de diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva, representada en el plano cartesiano y en situaciones de variación. Por otra parte, algunas investigaciones sobre la conceptualización de la noción de pendiente llevan a resaltar varios conceptos sobre esta, como los registrados en la tabla 1. Sin embargo, desde las aulas de clase, según lo manifiestan algunos estudiantes, el estudio del objeto matemático *pendiente* es más de repetición, memorización de fórmulas, pero no de comprensión y aplicación a situaciones reales.

Tabla 1: Conceptualización del objeto matemático *pendiente*.

Tipo	Noción de pendiente	Registro
Gráfica	Definida como la representación del lugar geométrico recta y su ubicación dentro de un plano cartesiano. Considera la razón entre el desplazamiento vertical y horizontal.	
Algebraica	Definida como la ecuación de la recta. Variación de y sobre la variación x .	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
Visual	Definida como la inclinación, grado, incluso posición del lugar geométrico recta.	
Función	Tasa de cambio constante entre dos variables.	$d(t) = v(t) + c$
Coefficiente paramétrico	Determina el valor numérico de m .	$y = mx + b$
Trigonométrica	Se relaciona con el ángulo de inclinación de una recta, con respecto al eje x .	$\tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
Cálculo	Limite, derivada o tasa de cambio para cualquier función.	$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$
Contexto	Situaciones cotidianas.	Carreteras con inclinación del 9%



Propiedad	Si dos rectas son paralelas o perpendiculares.	$m_1 = m_2$ $m_1 m_2 = -1$
Indicador	Comportamiento, aumento o disminución.	
Constante lineal	La pendiente se pueda determinar por dos puntos; dada la colinealidad de los puntos, no se afecta al ser trasladada.	

Fuente: Adaptado de (Nagle, Moore, Viglietti, & Martin (2013).

Desde la experiencia docente, y luego de hacer un diagnóstico a estudiantes de grado décimo, se evidencia la falta de comprensión del objeto matemático pendiente y especial confusión, o no relación, entre las diferentes representaciones semióticas de este objeto. Así, algunos estudiantes confunden la medida del ángulo de inclinación de una recta con su pendiente, otros solo evidencian una pendiente desde su aspecto geométrico, localizando dos puntos en un plano o su ubicación en el mismo, pero no la aplicabilidad a otras disciplinas; dada esta situación, en este artículo se describe los hallazgos de una investigación que pretende analizar la forma como las representaciones semióticas afectan el aprendizaje del objeto matemático pendiente en algunos estudiantes de grado décimo, de la ciudad de Tunja.

Las representaciones semióticas emplean un conjunto de notaciones que son empleadas en diferentes disciplinas y ciencias; utilizan sistemas numéricos, gráficos, códigos, de lenguaje y escritura, entre otros, que sirven como medio de comunicación (Duval, 1999). “Las representaciones semióticas estarían, pues, subordinadas por entero a las representaciones mentales y no cumplirían más que funciones de comunicación” (p.14).

Según Duval (1999), al analizar el conocimiento y obstáculos que se presentan en el aprendizaje, relativos al razonar, a la comprensión y aspectos lógico-matemáticos, se presentan tres fenómenos descritos en la figura 1.

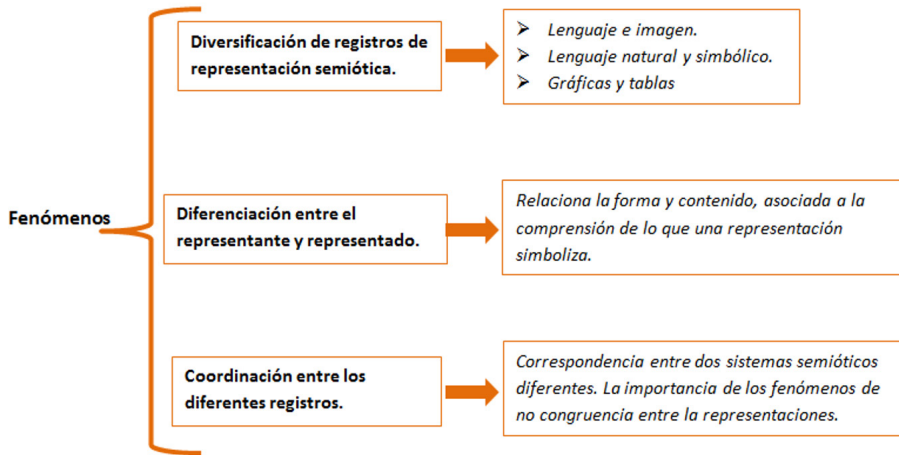


Figura 1: Fenómenos en aprendizaje por la representación semiótica, Fuente: Adaptado de Duval (1999).

También, es necesario considerar que toda actividad cognitiva del ser humano se basa en tres principios básicos, en el complemento de estos y en los tipos de transformaciones que, dependiendo de la función de estas transformaciones y su secuencia, apoyan a la comprensión de objetos generales más complejos. En el siguiente diagrama se describen los principios o factores que inciden en la actividad cognitiva, según Duval (1999).

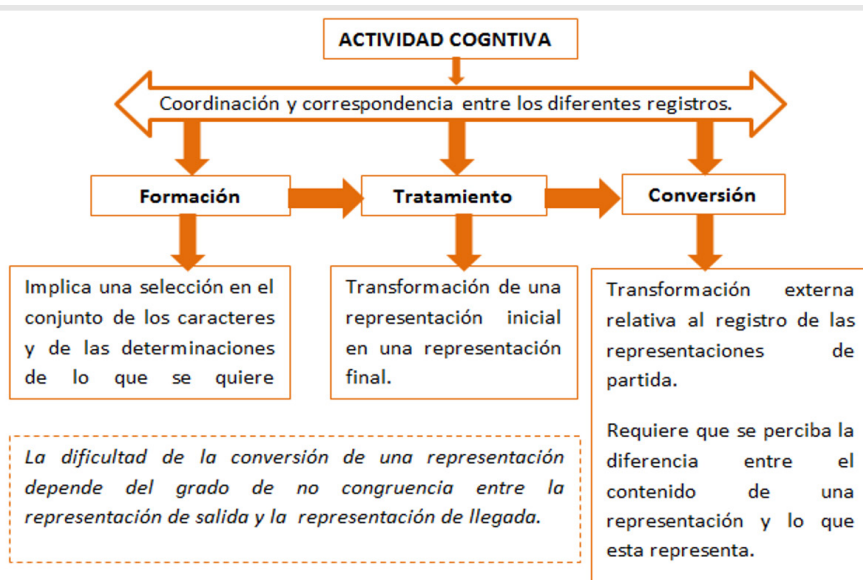


Figura 2: Actividad cognitiva a través de la representación semiótica, Fuente: Adaptado de Duval (1999)



Metodología

La investigación se realiza en una unidad de análisis de quince (15) estudiantes, que se encuentran cursando grado décimo; siguiendo las ideas de Casilimas (2002), quien considera que el conocimiento debe ser compartido y, por tal motivo, debe existir una interacción entre el investigado y el investigador, que puede integrarse con los sujetos de la investigación, para comprender la lógica interna y algunas especificidades que suceden alrededor del objeto matemático *pendiente* y sus representaciones semióticas. Y según Hernández (2014), en los enfoques de tipo cualitativo, los datos no son estandarizados, ni predeterminados, puesto que la “recolección consiste en obtener las perspectivas y puntos de vista de los participantes (sus emociones, prioridades, experiencias, significados y otros aspectos más bien subjetivos)” (p.8). Así mismo, Strauss y Corbin (2002), al considerar que el estudio cualitativo implica la no utilización de componentes cuantitativos, definen algunos instrumentos para la recolección de información como entrevistas, observaciones, registros, documentos, entre otros, que en la investigación se desarrolló a través de aplicación de una serie de talleres. De esta manera, se definen seis (6) fases de la investigación, a saber: Identificación de las representaciones semióticas del objeto matemático pendiente, diseño de estrategias, registro de resultados de las estrategias pedagógicas, categorización de los hallazgos, análisis y resultados.

Desarrollo del Trabajo

Para identificar las representaciones semióticas, utilizadas en el objeto matemático pendiente, se tiene en cuenta el trabajo de conceptualización que realizan Nagle y Moore (2013) descrito en la tabla 2; así mismo, la teoría expuesta por Duval (1999) y D’Amore (2006), y la ejemplificación citada por Oviedo y Kanashiro (2012), en cuanto la distinción de registros y representaciones semióticas en matemáticas. Con lo anterior, el conjunto de símbolos, signos, lenguajes gráficos, lenguaje natural, escritura numérica, entre otros, hacen parte de las representaciones semióticas que, a su vez, usan unos registros para comunicar un concepto, una idea o un objeto; en esta investigación, se identifican las siguientes representaciones semióticas para el objeto matemático pendiente.



Tabla 2: Representaciones semióticas y registros del objeto matemático pendiente.

Representación semiótica	Registro	Característica
❖ Escritura con ecuaciones.	Lenguaje algebraico	Expresa la pendiente en forma de ecuación o de función.
❖ Escritura con funciones		
❖ Sistema de coordenadas	Gráfico	Expresa la pendiente en su forma gráfica, teniendo en cuenta un sistema coordenadas o plano, también puede ser mostrada a través de la figura o diagrama de una aplicación de la pendiente.
❖ Diagrama		
❖ Situación de contexto	Lenguaje natural	Expresa la pendiente, en un enunciado, para determinar su aplicación a la vida real o a situaciones de algunas disciplinas, como la física.
❖ Situación de una disciplina		

Fuente: Elaboración propia.

A partir de la definición de las representaciones semióticas ilustradas en la tabla 2, se diseñan tres talleres, cada uno enfocado en un registro semiótico: Lenguaje algebraico, gráfico y lenguaje natural. En el registro gráfico, se considera las representaciones de imágenes que fue categorizada como diagramas, y el sistema de coordenadas, donde se ubica el lugar geométrico recta en diferentes posiciones. En el lenguaje algebraico, se presenta la recta en su escritura en forma de ecuación, y por su linealidad como escritura de función, y el lenguaje natural donde se involucran situaciones de contexto y de algunas disciplinas como la economía o la física.

La aplicación de los talleres se realiza en tres sesiones, teniendo en cuenta que cada taller tiene como objetivo identificar dificultades en cada uno de los registros semióticos abordados; y luego, se hace el análisis acorde con la actividad cognitiva propuesta por Duval (1999). (figura 2).

Análisis y resultados

Los resultados se analizan desde la actividad cognitiva de las representaciones semióticas de Duval (1999) y se encuentra lo siguiente en cada uno de los registros:



Registro gráfico: Algunos estudiantes tienen idealizada la pendiente como la variación de Y sobre la variación de X, pero al ser analizada en la figura 3, se puede apreciar que no comprenden su noción y se basan en la posición del lugar geométrico para determinar la pendiente, asumiendo que es 6/5.

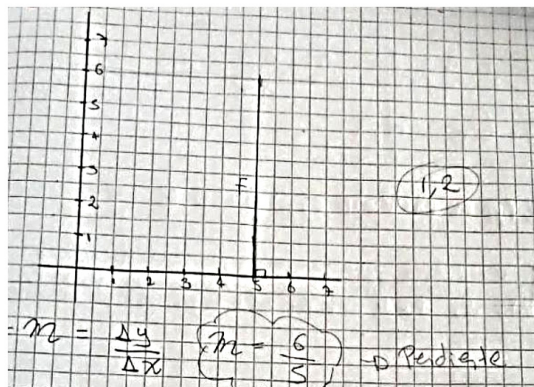


Figura 3. Sistema de coordenadas, pendiente indefinida, Fuente: Talleres aplicados.

Así mismo, cuando se les presenta las imágenes de escaleras que tienen la misma inclinación y se les pide que determinen la pendiente, la mayoría de estudiantes optan trazar un plano cartesiano, haciendo una transformación entre registros; asumen el origen del plano como inicio de las escaleras, y la noción de pendiente, nuevamente, como la variación de Y sobre X.

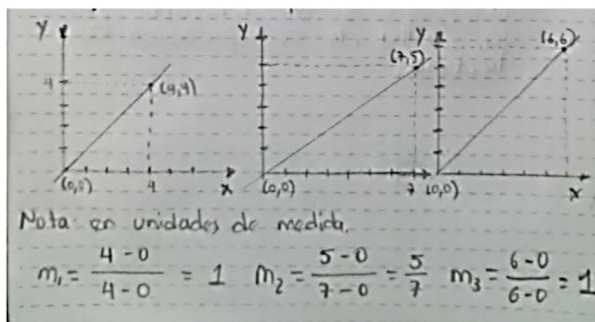


Figura 4: Sistema de coordenadas, pendiente 1, Fuente: Talleres aplicados.

Algunos estudiantes manifestaron presentar dificultades por no tener visible los puntos que pasaban por la recta y no recordar “la fórmula”, así como el no abordar el tipo de ejercicios, como el de las imágenes de las escaleras, puesto que no están acostumbrados a estudiar sobre situaciones



reales. Aquí es posible identificar una falla, no sólo desde el estudiante, sino también desde la enseñanza que puede estar impartiendo el docente, lo cual se constituye en un obstáculo.

Registro algebraico: La mayoría de los estudiantes manifiestan una apropiación en el uso de las diferentes formas de ecuación de la recta para determinar la pendiente; y las dificultades referidas son la de no recordar la fórmula para su cálculo.

1). $(-3, 2)$ y $(2, 5, 0)$ $m = ?$
 \Rightarrow $(-3, 2)$ \rightarrow $(2, 5, 0)$
 x_1, y_1 x_2, y_2
 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 2}{2,5 - (-3)} = \frac{-2}{5,5} = \frac{-4}{11}$

Figura 5: Ecuación de la recta, dados dos puntos, Fuente: Talleres aplicados.

$\Rightarrow y = -\frac{7}{6}x - \frac{17}{6}$
 $y = mx + b$; $m = -\frac{7}{6}$
 4). n.c.

Figura 6: Ecuación de la recta, punto pendiente, Fuente: Talleres aplicados.

3. $7x + 6y = -17$. $Ax + By = C$ $-\frac{A}{B}$
 $A = 7$
 $B = 6$ $m = -\frac{7}{6}$

Figura 7: Ecuación de la recta en su forma general, Fuente: Talleres aplicados.

Según la conceptualización de la tabla 1, cuando se relaciona una función, la noción de pendiente es determinada por la tasa de cambio entre variables; de esta manera, se puede decir que la pendiente, en estos casos, indica la constante de proporcionalidad y la relación entre variables. En las respuestas de los estudiantes, la pendiente de una función va más hacia el registro gráfico y la ubicación del lugar geométrico en el plano; algunas nociones sobre la razón de cambio, pero sin entender qué significa esto. Por otra, parte al referir que la pendiente indica si la recta es creciente o



decreciente, se encuentra un error de interpretación, puesto que el signo que acompaña al número sería indicador de este hecho. Cuando refieren: “*para cada valor de x , y es las veces del valor de la pendiente más el valor del punto de corte*”, se encuentra una imprecisión, al no diferenciar que el valor de la pendiente es un número que pertenece al conjunto de los reales y el punto de corte es un par ordenado, lo que implica que no puede realizarse esta operación.

Registro lenguaje natural: Lo que se quería con este taller era ver la capacidad del estudiante al modelar situaciones reales y también aplicadas a algunas disciplinas, y que determinaran la relación entre variables, como lo sugieren los Estándares Básicos de Matemáticas del MEN (2019). Una de las situaciones se enfoca a la pendiente expresada en porcentaje, puesto que algunos estudiantes ya habían preguntado: ¿Qué significa la pendiente de un tanto por ciento? y surge, especialmente, cuando hay competencias ciclistas. La pendiente en porcentaje es un término utilizado, especialmente, cuando se habla de qué tanto está inclinada una carretera; para determinar la pendiente, se toma la tangente de la distancia en ascenso sobre la que avanza horizontalmente, y se multiplica por el 100%. Ahora, al revisar que 10 estudiantes no realizan el ejercicio, se supone una falta de interés al resolver situaciones de este tipo, al igual que la no comprensión del objeto matemático pendiente. El cambiar el registro usual, al expresar la pendiente con un número real y cambiarla por un porcentaje, confunde al estudiante, ya que ellos argumentan que no lo han visto en clase; nuevamente, se puede resaltar la forma como el docente influye en el aprendizaje del estudiante. En la segunda situación, al no reconocer la pendiente como una constante de proporcionalidad de la función que determina la ganancia por empanada y que refiere “*en el caso de las empanadas qué tiene que ver con la pendiente*”, es una muestra de no aprendizaje del objeto matemático, pero sí de algunas representaciones. Por último, es importante reconocer el interés mostrado por cinco (5) de los estudiantes, quienes dejan ver autonomía al preguntar e indagar cómo resolver este tipo de ejercicio.

Cabe anotar que, además de suponer falta de interés, yace una dificultad en la forma como es presentado el ejercicio, por lo cual el registro de lenguaje natural no es de fácil comprensión; además, el estudiante tiene que hacer uso de la transformación a otros registros, para que cobre sentido en su noción matemática de *pendiente*.



Conclusiones

Según Duval (1999), las representaciones semióticas juegan un papel muy importante en la actividad cognitiva y, a su vez, en el aprendizaje; así mismo, en el aprendizaje del objeto matemático pendiente, puesto que en el individuo suceden dos tipos de representaciones: una mental y otra semiótica. La mental cumple con la función de objetivación, pero la segunda, que hace referencia a la representación semiótica, se desarrollan varias funciones: la objetivación, que podría relacionarse con lo que se busca determinar, haciendo uso de una representación; la expresión, encaminada al uso de registros, que incorpora algunos caracteres para su identificación, y la transformación que, a través de un tratamiento de los registros iniciales, puede encontrar un resultado; así mismo: “La actividad conceptual no puede ser aislada de la actividad semiótica porque la comprensión conceptual aparece ligada al descubrimiento de una invarianza entre representaciones semióticas heterogéneas” (Duval) (1999, p 60).

En el aprendizaje del objeto matemático pendiente, se encuentran varias dificultades, entre las que están: la no comprensión de la pendiente, puesto que en la educación secundaria se trabaja más desde el aspecto gráfico, asociada al grado de inclinación de lugar geométrico de la recta; se fija la atención del estudiante, más en su representación que en lo que verdaderamente representa; es por esta situación que a los estudiantes no se les facilita la transformación entre registros y representaciones semióticas para obtener, según lo refiere Duval, una actividad cognitiva que conduzca a un verdadero aprendizaje.

Se evidencian dificultades en pasar de un registro semiótico a otro, especialmente cuando se requiere transformar un lenguaje natural a uno algebraico, ya sea en forma de ecuación o de función lineal, debido a que, en algunas circunstancias, la no comprensión de cada registro y la visión de la pendiente desde la geométrica conducen a generar obstáculos en el aprendizaje del objeto matemático pendiente, que sería importante revisar en otra investigación.

Es relevante tener en cuenta que las representaciones semióticas son fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas, puesto que sirven como medio de comunicación para formar el objeto matemático; por esta razón, es conveniente que los docentes de matemáticas no centren la noción de pendiente solo en un registro y una representación semiótica



sino que, también, sea llevada a varias representaciones que se pueden ser apoyadas por las aplicaciones de la *pendiente*.

Es conveniente que el objeto matemático pendiente se aborde no solo desde la ubicación del lugar geométrico de la recta y sus ecuaciones, sino que se tome desde el Cálculo, como la constante de proporcionalidad de una función lineal aplicada a la vida real; esta situación ayuda a que el estudiante logre transformar registros y llevarlos a diferentes representaciones semióticas para lograr una actividad cognitiva efectiva, mediante la realización del esquema que proporcionan una base para el aprendizaje de las matemáticas.

Actualmente, en la educación secundaria se sigue notando que la matemática es una de las asignaturas que tiene mayor número de estudiantes con desempeños académicos bajos; es posible notar, con los resultados de la investigación, que los métodos utilizados para el cálculo de la pendiente son siempre los mismos, limitados a la posición del lugar geométrico recta, en un plano y el uso de sus diferentes formas de ecuación; por tanto, sería ideal pensar en la implementación adecuada de las diferentes representaciones semióticas del objeto matemático pendiente, especialmente contextualizado y acorde con las necesidades de hoy, para el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Referencias bibliográficas

- Abreu, R., Flores, C., Sánchez, J., & Sigarreta, J. (2020). El concepto de pendiente: estudio de la investigación y prospectivas. *Números*, 81-98.
- Amaya, T. (2016). *Evaluación de los conocimientos didácticos-matemáticos de futuros profesores de matemáticas al hacer transformaciones de las representaciones de una función*. Sincelejo: Universidad Nacional de Educación a Distancia.
- Casilimas, C. (2002). *Investigación Cualitativa*. Bogotá: ARFO Editores e Impresores Ltda.
- D'Amore, B. (2006). Objeto, significados, representaciones semióticas y sentido. *Relime*, 177-195.



- D'Amore, B., & Fandiño, M. (2010). *La didáctica y la dificultad en matemática*. Bogotá: Magisterio.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali: Peter Lang.
- Hernández, R. (2014). *Metodología de la investigación*. México: Mc Graw Hill.
- Lehmann, C. (2012). *Geometría Analítica*. México: Limusa.
- León, O., & Calderón, I. (2014). Semiosis y lenguaje en la didáctica de las matemáticas. *Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básico de competencias en lenguaje, matemáticas y competencias ciudadanas. *Revolución Educativa Colombia Aprende*, 46-95.
- Nagle, C., Moore, D., Viglietti, J., & Martin, K. (2013). Calculus students' and instructors' conceptualizations of slope: A comparison across academic levels. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1491-1515.
- Oviedo, L., & Kanashiro, A. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Aula Universitaria*, 29-36.
- Rivera, M., Gerardo, S., & Flores, C. (2019). Explorando las conceptualizaciones de la pendiente en estudiantes universitarios. *Bolema*.
- Sanchez, C., Sabogal, Y., & Buitago, L. (2016). *Saberes matemáticos*. Bogotá: Santillana.
- Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. *Investigación en Educación Matemática, Universidad de la Laguna*, 19-52.

Como citar este artículo: Suarez-Sotomonte, P. y Berdugo-Cely, E. (2021). Lo Pendiente De La Pendiente. *Voces y Realidades Educativas*, (6) 181-193
