



RELACIÓN GRÁFICA Y ALGEBRAICA DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2×2 PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

GRAPHICAL AND ALGEBRAIC RELATION OF THE SYSTEMS
OF LINEAR EQUATIONS 2×2 FOR PROBLEM SOLVING

Yesid Becerra Rodríguez¹
José Francisco Leguizamón Romero²
Arley Zamir Chaparro Cardozo³

Recepción: agosto de 2020
Aceptación: noviembre de 2020
Artículo de investigación

Resumen

La descripción y los resultados de la aplicación de un material didáctico orientado a favorecer la capacidad de la actividad cognitiva de conversión del registro gráfico en algebraico y viceversa, de los sistemas de objetos matemáticos de ecuaciones lineales 2×2 para la solución de problemas siguiendo la Heurística de Polya (1965). Las actividades planificadas se

- ¹ Licenciado en Matemáticas y estudiante de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia y miembro del grupo de Investigación PIRAMIDE en la línea de Semiótica y comunicación (UPTC), Colombia, correo electrónico: yesid_be@hotmail.com ORCID iD <https://orcid.org/0000-0003-2939-179X>.
- ² Licenciado en Matemáticas y Física, Doctor en Ciencias de la Educación, profesor titular de la Licenciatura en Matemáticas y miembro del grupo de Investigación PIRAMIDE en la línea de Semiótica y Comunicación y (UPTC), Colombia, correo electrónico: francisco.leguizamón@uptc.edu.co ORCID iD <https://orcid.org/0000-0002-4131-9582>
- ³ Licenciado en Matemáticas, Magister en Educación, profesor de la Licenciatura en Matemáticas y miembro del grupo de Investigación PIRAMIDE en la línea de Semiótica y Comunicación (UPTC), Colombia, correo electrónico: arley.chaparro@uptc.edu.co. ORCID iD <https://orcid.org/0000-0002-1639-0184>



llevaron a cabo con un grupo de estudiantes de décimo año de un instituto privado ubicado en el municipio de Santa Rosa de Viterbo Boyacá. La metodología de investigación se enmarcó en el paradigma mixto con énfasis cualitativo y su alcance fue exploratorio, donde se desarrollaron las fases de la Ingeniería Didáctica con el enfoque de microingeniería. El desarrollo de la intervención mostró que el diseño de una secuencia didáctica basada en el marco de resolución de problemas favorece los procesos de conversión entre diferentes representaciones, así como la exploración de los métodos de solución para un sistema 2×2 de ecuaciones lineales. Se muestra cómo la población estudiada reconoció el objeto matemático en la representación gráfica y algebraica.

Palabras claves: resolución de problemas, actividad cognitiva de conversión, ingeniería didáctica, objeto matemático.

Abstract

The description and results of the application of a didactic material oriented to favor the capacity of the cognitive activity to convert the graphic register into algebraic and vice versa, of the systems of mathematical objects of linear equations 2×2 for the solution of problems following the Heuristic by Polya (1965). The planned activities were carried out with a group of tenth-year students from a private institute located in the municipality of Santa Rosa de Viterbo Boyacá. The research methodology was framed in the mixed paradigm with qualitative emphasis and its scope was exploratory, where the phases of Didactic Engineering were developed with the microengineering approach. The development of the intervention showed that the design of a didactic sequence based on the problem-solving framework favors the conversion processes between different representations, as well as the exploration of the solution methods for a 2×2 system of linear equations. It shows how the studied population recognized the mathematical object in the graphic and algebraic representation.

Key words: problem solving, cognitive conversion activity, didactic engineering, mathematical object.



Introducción

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), los procesos generales de la actividad matemática se establecen como una dimensión transversal a los cinco pensamientos en matemática, dentro de estos procesos generales se encuentra la formulación, la manejo y resolución de problemas, lo que le permite movilizar diferentes formas de razonamiento en matemáticas; Además, en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (2006), el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, que son parte fundamental para abordar objetos matemáticos como los Sistemas de Ecuaciones Lineales 2×2 (SEL 2×2), son considerados de gran importancia. Importancia en la educación matemática en el noveno año de la educación secundaria básica, aquí es donde un estudiante toma su primer enfoque.

Leguizamón (2017, p.75-76), realiza un acercamiento a la noción de problema basado en la siguiente revisión documental:

Hoc (1987) citado por Chamorro (2003, p. 276) “un problema es la representación de un sistema cognitivo construido a partir de una tarea, sin disponer inmediatamente de un procedimiento admisible para alcanzar el objetivo”. Otra postura por mencionar es la de Schoenfeld (1985) citado por Santos (2007, p. 48) para el cual “un problema es una tarea difícil para el individuo que está tratando de hacerla”. Como se puede deducir de las posiciones anteriores, un problema es una encrucijada en donde hace falta ingenio para poder salir de ella. Para el caso matemático se pueden aplicar las anteriores definiciones con la particularidad que las situaciones se refieren a entes matemáticos, lo que sí es claro es que solucionar un problema matemático va más allá de aplicar algoritmos y realizar operaciones.

En razón a esto, Polya (1965) plantea un método que orienta la solución de problemas mediante la aplicación de un esquema de razonamiento o heurística que contempla el siguiente procedimiento: comprender el problema, concebir un plan, ejecución del plan y examinar la solución.

Comprender el problema hace referencia a que el estudiante responda a preguntas tales como: ¿qué le pide el problema?, ¿cuáles son los datos?, ¿hay información que le brinda el problema que no se requiere para la solución de este?



Concebir un plan permite recurrir a la experiencia en cuanto a la forma de cómo ha solucionado problemas parecidos o anteriores, estableciendo estrategias que va a usar el estudiante para resolver el problema, estas pueden ser desde aplicar pruebas de ensayo y error, hasta plantear toda una táctica que le permita intentar llegar a la solución de este.

Ejecución del plan busca poner en práctica el plan trazado, se inicia cuando tiene claridad del punto de partida y los percances que puedan presentarse, generalmente se usan procedimientos matemáticos que permiten darle solución al problema.

Examinar la solución obtenida es ver si el proceso desarrollado permitió resolver el problema. En este último paso, el estudiante está en la capacidad responder ¿Su respuesta cumple con lo pedido en el problema?, ¿la solución tiene sentido?, ¿considera que existe alguna otra solución? ¿Cuál sería?

Para la solución de problemas que involucran SEL 2×2 , existen diferentes métodos convenciones tratados en la Educación Básica Secundaria, entre estos el método de eliminación, sustitución, igualación y determinantes y gráfico. Se ha evidenciado en el trabajo realizado en aula que en la mayoría los estudiantes no recurren al método grafico para la solución de un SEL 2×2 , es decir, predomina los métodos algebraicos convencionales. Frente a esto, Ramírez (1997) plantea que los estudiantes “no efectúan la representación y resolución grafica de un sistema de ecuaciones lineales, dándole un estatus inframatemático a este registro de representación” (citado en Segura, 2004, p.52), otros de los factores de acuerdo Pérez, (1998) es que “recurren pocas veces al pasaje del registro gráfico al algebraico para resolver un sistema de ecuaciones lineales” (citado en Segura, 2004, p.52). Indicando una disociación entre la representación algebraica con la gráfica de un SEL 2×2 para la resolución de problemas.

Un SEL 2×2 en el registro algebraico es un conjunto de ecuaciones formado por un par de ecuaciones lineales (de grado uno) con dos variables, se aclara, que para este registro el uso de la variable como incógnitas. Respecto al registro grafico cartesiano de un SEL 2×2 , se acude a la herramienta matemática del plano cartesiano con la ubicación de pares ordenados expresando la dependencia entre las dos variables; en este registro el uso de las variables es utilizado para expresar cantidades que varían conjuntamente, su gráfica muestra la solución de un SEL 2×2



y estas pueden ser rectas paralelas (ninguna solución), secantes (solución única) o coincidentes (infinitas soluciones).

La investigación relacionó los registros de representación algebraica con el gráfico cartesiano del objeto matemático en estudio, el cual correspondió a un SEL 2×2 , al igual que los métodos convencionales de solución empleados en el nivel de escolaridad los estudiantes de grado noveno. Con respecto a la representación algebraica ésta “permite recoger la generalidad a través del símbolo, en términos de ser un representante de cualquier elemento de un determinado conjunto numérico” (García, 2013, p.46); de otra parte, en el registro gráfico cartesiano de acuerdo con Azcarate y Deuloffu (1996) “es un excelente instrumento para expresar la dependencia entre dos variables, además comentan que la capacidad para leer, interpretar y construir gráficas cartesianas, permite establecer la relación existente entre magnitudes representadas” (citado por García, 2013, p.47).

Gracias a las nuevas interpretaciones que permite el campo de la semiótica en las matemáticas, ha permitido reconocer dimensiones de los objetos matemáticos “en el sentido que no son accesibles perceptiva o instrumentalmente” (D’Amore, Fandiño y Iori, 2013, p.7), de modo que es necesario acceder a éstos mediante sus representaciones. La transformación es la propiedad fundamental de las representaciones semióticas, la cual se tiene en cuenta para los cambios entre registros, a este proceso Duval (1999) denomina la actividad cognitiva de conversión y la define de la siguiente manera: “es una transformación que produce una representación en un registro diferente conservando los objetos” (p. 40).

Metodología

La investigación se enmarcó en el paradigma de investigación mixta; Sin embargo, para ser precisos, se requirió un análisis con predominio cualitativo y el alcance fue exploratorio, lo que abre un camino para futuras investigaciones en este contexto particular. Se llevó a cabo en una institución privada ubicada en el municipio de Santa Rosa de Viterbo (Boyacá), donde participaron 15 alumnos de décimo grado, quienes fueron seleccionados con base en el hecho de tener conocimientos previos sobre SEL 2×2 y se llevó a cabo tomando en Tener en cuenta las consideraciones éticas el consentimiento informado de los estudiantes, tutores y administradores.



Debido a la delimitación del tema abordado y las particularidades del aula, la investigación se estructuró desde la microingeniería didáctica y según Artigue (1995) este tipo de estudios con este enfoque son factibles de realizar, sin embargo “[...] Aunque permiten tener en cuenta localmente la complejidad de los fenómenos de clase, no permiten vincularla con la complejidad esencial de los fenómenos asociados a la duración de las relaciones entre enseñanza y aprendizaje” (p. 36-37).

Diseño metodológico de la investigación. En la metodología de la ingeniería didáctica, Artigue (1995) establece cuatro fases: 1) análisis preliminares, 2) concepción y el análisis a priori, 3) experimentación, 4) análisis a posteriori y validación. A continuación, se hace una descripción de cada una de las fases y la forma como se adaptó a la investigación.

Primera fase: análisis preliminares. Es la forma como el investigador se aproxima e indaga al objeto de estudio, para Artigue (1995) el análisis en esta fase se realiza bajo tres dimensiones: 1) epistemológica, 2) cognitiva y 3) didáctica, de igual manera un análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva.

La dimensión epistemológica, es asociada a las características del saber en juego. Por tal motivo se realizó un estudio sobre la naturaleza, representación y significado del objeto matemático SEL 2×2 .

La dimensión cognitiva, se estudia las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza, para tal caso, se diseñó y se aplicó un cuestionario diagnóstico a los 15 estudiantes y tenía como propósito conocer los cambios entre registros de representación semiótica que manejaban los estudiantes especialmente la conversión del registro algebraico al gráfico y viceversa, al igual que la identificación de la representación y resolución gráfica de un SEL 2×2 . Para su solución se dio un espacio tiempo de dos horas.

La dimensión didáctica, se refiere a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza, para tal fin, se hizo un análisis cualitativo a las herramientas que la institución disponía para los procesos de enseñanza y aprendizaje de la temática, donde se identificó que el único recurso era un libro guía, el propósito fue conocer las actividades cognitivas asociadas especialmente la conversión y los registros frecuentemente utilizados en el estudio de SEL 2×2 .



El análisis del campo de restricciones se encuentra relacionado con el contexto de la investigación y descripción de la población con la que se experimentó cada actividad diseñada, por tanto, se llevó a cabo con la población mencionada anteriormente, sus edades estaban en un rango de 14 a 16 años de edad.

Segunda fase: concepción y el análisis a priori. El investigador “toma la decisión de trabajar con un determinado número de variables del sistema no fijadas por las restricciones llamadas variables de comando” (Artigue, 1995, p.42). Existen dos tipos de variables “las variables macro-didácticas o globales, concernientes a la organización global de la ingeniería. Y las variables micro-didácticas o locales, concernientes a la organización local de la ingeniería, es decir, la organización de una secuencia o fase” (Artigue, 1995, p.42).

Respecto a variables macro-didácticas o globales se tuvo en cuenta aspectos de la matemática como: 1) establecer el conjunto numérico, el cual fue los números reales, 2) planteamiento de los problemas que requerían plantear SEL 2×2 cuya solución puede ser por métodos algebraicos o gráfico. Por otro lado, aspectos cognitivos como la conversión del registro gráfico al algebraico y viceversa, de este objeto matemático.

Lo que tiene que ver con las variables micro-didácticas o locales se identificaron las que intervienen en el material diseñado, específicamente las asociadas al registro gráfico y algebraico, del registro gráfico: 1) ubicación de pares ordenados y reconocimiento de la gráfica, 2) significado de la coordenada cartesiana de la intersección entre dos rectas, del registro algebraico únicamente en reconocimiento y representación del uso de las variables (variables como incógnitas y las variables para expresar cantidades que varían conjuntamente) utilizadas en el SEL 2×2 .

Esta fase cumplió con dos objetivos: 1) diseñar el material didáctico, 2) se realizó un análisis a priori, es decir, resultados esperados, en cuanto a dificultades y posibles soluciones.

Tercera fase: experimentación. Es la aplicación del material diseñado, y allí se explica la forma de trabajo, las funciones a cumplir por parte del profesor en y el rol de los estudiantes. El desarrollo de cada actividad didáctica fue de manera individual y se recolectaron las producciones escritas por el estudiante. Se diseñó un cronograma de ejecución,



teniendo en cuenta las sesiones de clase de matemáticas establecidas por la institución, donde semanalmente se aplicaba una actividad con duración de dos horas.

Cuarta fase: análisis a posteriori y validación. De acuerdo con Artigue (1995), el análisis a posteriori “se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación” (p.48). Se analizaron cuantitativa y cualitativamente las producciones escritas por los estudiantes y es orientado a identificar la representación y solución de un SEL 2×2 que utilizan los estudiantes cuando participan en cada una de las actividades. Para la validación se realizó una contrastación de los comportamientos esperados (a priori) con los que realmente sucedieron en la experimentación (a posteriori).

Técnicas e instrumentos de investigación. Los instrumentos utilizados fueron un cuestionario diagnóstico aplicado en la fase de análisis preliminar y fue sometido a pares evaluadores. De igual manera se diseñaron cuatro actividades, tres de ellas estaban dirigidas a reconocer la representación y resolución gráfica del objeto matemático de estudio y tan solo una se estuvo a la expectativa a que método de solución los estudiantes recurrían; fueron aplicadas en la fase de experimentación. Respecto a las técnicas de investigación utilizadas se describió y se analizó el material didáctico aplicado (cuatro actividades) y el cuestionario diagnóstico.

Resultados

A continuación, se presentan los resultados analizados en la fase cuatro sobre análisis a posteriori y validación de la Ingeniería Didáctica. Respecto a la conversión entre registro gráfico y algebraico y viceversa, y los métodos de solución de un SEL 2×2 para la resolución de problemas, trabajados por la población de estudio en las actividades.

Actividad 1. Al estudiante se le dio la información de la siguiente manera: primero la definición de circunferencia como espacio geométrico según la métrica euclidiana y su gráfica con centro $(-2,3)$ y radio 3 unidades; luego un enunciado de acuerdo con la métrica propuesta Minkowski (métrica del taxista) donde se pueden lograr representaciones diferentes, partiendo del mismo punto $(-2,3)$ y desplazándose en forma horizontal, vertical o en ambas (sin cambiar de sentido) con el número correspondiente al radio anterior; finalmente, se les solicitó a los estudiantes la siguiente



información respecto a la primera actividad: a) ¿cuál sería la gráfica? b) elabore una tabla donde ubique las coordenadas cartesianas de la gráfica encontrada, c) ¿cuáles puntos destacaría de la gráfica? y d) encuentre las ecuaciones de las rectas que limitan la figura.

Con la pregunta ¿cuál sería la gráfica?, los estudiantes reconocieron los cuatro SEL 2x2 con única solución en el registro gráfico, donde cada sistema es conformado por rectas que se interceptan dos a dos. Luego de que identificaron los cuatro vértices del rombo como puntos destacados, lograron plantear los sistemas, donde el 73% de los participantes acudió algún método algebraico para su solución, concluyendo que los valores hallados satisfacen las igualdades y coinciden con los pares ordenados (x, y) de la gráfica, esto se evidenció en el cuarto paso de la heurística de Polya (1965).

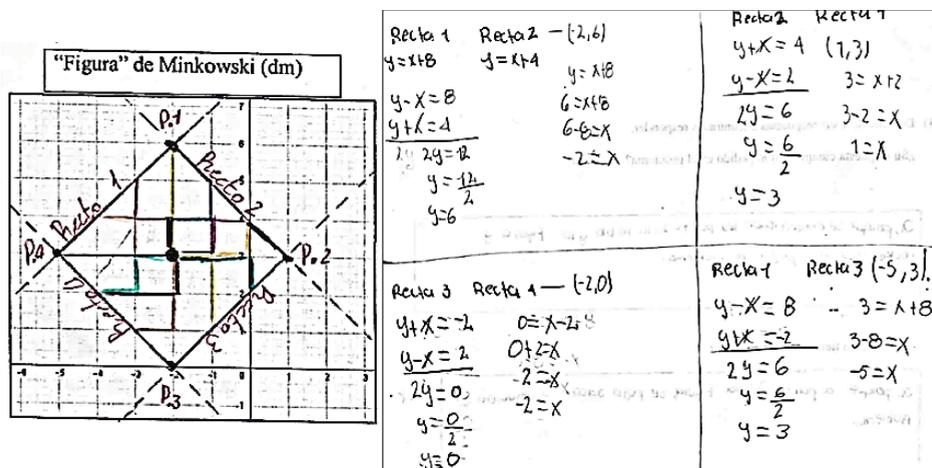


Figura 1. Evidencia del reconocimiento de las rectas que conformaron los SEL 2x2 y forma cómo los estudiantes utilizaron el método de eliminación para comprobar los vértices del rombo.

Actividad 2. Se presentó un enunciado que solicitaba encontrar la coordenada del centro de un rectángulo, sabiendo que tiene 4 unidades de ancho y 6 unidades de largo, luego comprobar que la coordenada central del rectángulo es la correcta. En el segundo paso de la heurística de Polya (1965) los estudiantes trazan las rectas diagonales del rectángulo, representando gráficamente un SEL 2x2 con única solución y en el tercer paso de la heurística de Polya (1965) comprueban que dicha coordenada cartesiana central es la correcta, para ello los estudiantes hicieron la actividad cognitiva de conversión del registro gráfico al algebraico del objeto matemático de estudio, es decir, plantearon el sistema y para



la solución del mismo, el 46% de los estudiantes reconocieron que el conjunto solución es la coordenada cartesiana (x, y) de intersección entre las rectas, valores que al ser reemplazados satisfacen las igualdades.

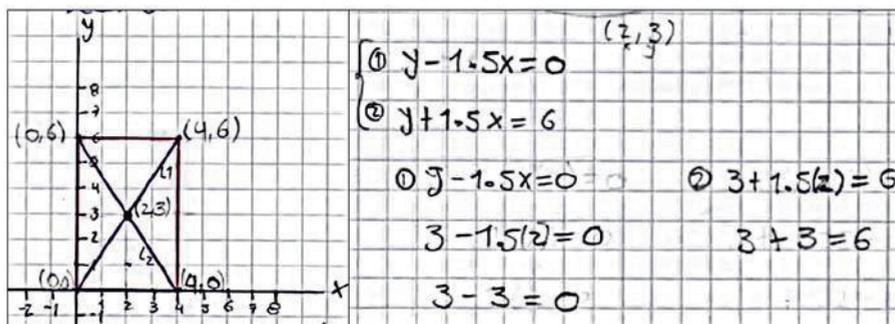


Figura 2. Evidencia de relación del registro gráfico con el algebraico del SEL 2×2 y comprobación de la coordenada cartesiana central del rectángulo, utilizando método gráfico.

Por otro lado, el 47% de los participantes acudió al algún método algebraico, especialmente el de reducción y concluye que el par ordenado encontrado, coincide con la coordenada cartesiana de intersección entre las rectas diagonales del rectángulo.

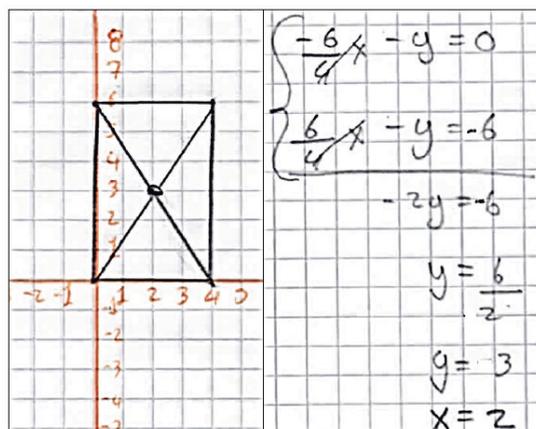


Figura 3. Evidencia de relación del registro gráfico con el algebraico de un SEL 2×2 y comprobación de la coordenada central del rectángulo método algebraico de reducción.

Actividad 3. Parte de plantearles a los estudiantes el enunciado el perímetro del rectángulo es de 10 unidades, la diferencia entre el triple del ancho y el triple largo equivale a 9 unidades, se les preguntó ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?; al hacer el análisis al tercer paso



de la heurística de Polya (1965) el 33% de los estudiantes plantea como estrategia de solución el registro gráfico, identificando la coordenada cartesiana (x,y) de intersección entre las rectas, evidenciado la conversión del registro algebraico al gráfico, y el 60% utilizó algún método algebraico, sin embargo, en el cuarto paso de la heurística Polya (1965) cuando dan respuesta a la pregunta sobre si existe otra solución, cuál sería, un 20% de los estudiantes reconocen que otra posible solución al SEL 2×2 es por método gráfico.

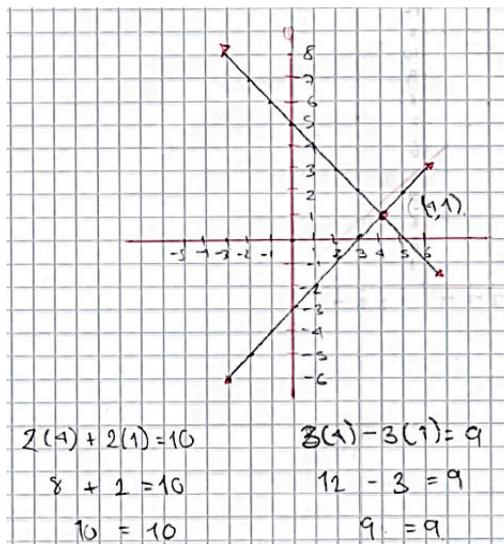


Figura 4. Evidencia de representación y solución grafica a un SEL 2×2 .

Actividad 4. Se plantea a los estudiantes una situación basada en una bandera que está conformada por un triángulo isósceles y dos trapecios rectangulares, en los cuales la unión de estas tres figuras planas conforma un rectángulo. Para esta representación se solicitó a los estudiantes inicialmente graficar en un solo plano cartesiano un par de tablas, luego dibujar un triángulo isósceles donde su base este en el eje de las ordenadas, de acuerdo con ello, se solicitó graficar cada uno de los trapecios rectangulares de tal manera que el perímetro de la bandera sea 36 unidades, y la base mayor de cada trapecio rectangular sea el doble de la longitud de la base del triángulo.

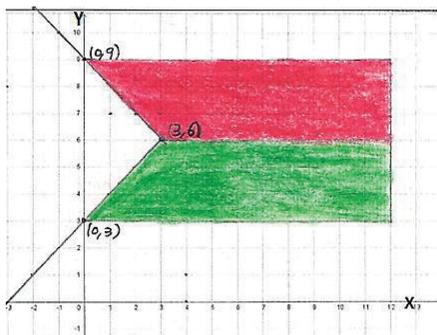


Figura 5. Representación de la bandera

La actividad consistió en comprobar que el vértice de coordenadas cartesianas (x, y) del triángulo isósceles que se encuentra en el interior de la bandera, es la solución a un SEL 2×2 , cuyas ecuaciones son dos de las rectas que limitan el triángulo. En un primer momento los estudiantes realizaron la conversión del registro gráfico al algebraico del objeto matemático, donde un 20% de la población reconoció el método gráfico como la solución al sistema planteado.

Reemplazo la coordenada del punto F que es (3,6) en la E.C 2×2

$$\begin{cases} \textcircled{1} y+x=9 \\ \textcircled{2} y-x=3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} 6+3 &= 9 & \textcircled{2} 6-3 &= 3 \\ 9 &= 9 & 3 &= 3 \end{aligned}$$

Figura 6. Evidencia de reconocer la solución a un SEL 2×2 por método gráfico.

Finalmente, el 60% de los estudiantes recurren al algún método algebraico para solucionar el sistema, por ejemplo, utilizaron el método de igualación, expresando el sistema en la representación funcional (la variable “y” en función de la variable “x”) para luego realizar el algoritmo correspondiente.

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -x + 9 \end{cases}$$

$$y = y$$

$$x + 3 = -x + 9$$

$$x + x = 9 - 3$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

$$y = 3$$

$$y = 6$$

Figura 7. Evidencia utilizando el método de igualación para la solución a un SEL 2×2 .



Conclusiones

Los estudiantes diferenciaron las representaciones del objeto matemático de estudio con una sola solución, esto se destacó en el proceso de conversión del registro gráfico a algebraico y viceversa, sin embargo, un porcentaje significativo de la población optó por utilizar métodos algebraicos convencionales para resolver un 2×2 SEL. La metodología de la Ingeniería Didáctica, en una primera fase, permitió a los investigadores conocer el objeto matemático, inicialmente, desde el punto de vista histórico y epistemológico, luego, los errores y dificultades que tenían los estudiantes en cuanto a las actividades cognitivas de cuidado y Conversión, de igual forma, de un análisis didáctico de los recursos disponibles en el instituto de enseñanza SEL 2×2 .

En la segunda fase se diseñaron y consideraron aspectos de las matemáticas, utilizando los diferentes métodos convencionales para resolver un SEL 2×2 , y en el campo cognitivo la relación de la representación gráfica con el objeto de estudio algebraico, realizando un análisis sobre las posibles dificultades y soluciones. La tercera fase fue la experimentación y finalmente la cuarta fase se analizaron las producciones escritas por los estudiantes, mostrando el método preferido para resolver un SEL 2×2 . Con la estrategia didáctica para la resolución de problemas que sigue la heurística de Polya (1965), se obtuvo que los estudiantes hicieran metacognición, cuando identificaron los diferentes métodos para resolver un SEL 2×2 y relacionaron tanto las representaciones como las soluciones que encontraron del objeto matemático de estudio, contribuyendo a una mejor comprensión.

Referencias Bibliográficas

- Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, & P. Gómez (Ed.), Ingeniería Didáctica en Educación Matemática (Primera ed., pág. 148). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana, S.A. de C.V.
- Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- D' Amore, B., Fandiño, M. I., & Iori, M. (2013). La semiótica en la didáctica de la matemática. Bogotá, Colombia: Cooperativa editorial magisterio.



- García, J. (2013). El concepto de función como una integración de los registros de representación. (Trabajo de grado de maestría). Universidad Nacional de Colombia. Medellín.
- Ministerio de Educación Nacional (1998). Matemáticas. Lineamientos curriculares. Cooperativa Editorial Magisterio. Bogotá.
- Ministerio de Educación Nacional (2006) Estándares Básicos de competencias en Matemática.
- Polya, G. (1965 (reimp, 2013)). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas.
- Segura de Herrero, S. M. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, 49-78.
- Leguizamón Romero, J. F. (2017). Evolución de los patrones de interacción comunicativa de los docentes de matemáticas. (Tesis inédita de doctorado) Universidad Pedagógica y Tecnológica sede Tunja, Colombia.

Como citar este artículo: Becerra-Rodríguez, Y.; Leguizamón-Romero, J. y Chaparro-Cardozo, A. (2020). Relación gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones lineales 2×2 para la resolución de problemas. *Voces y Realidades Educativas*, (5) 43 - 56
