FORMALIZACIÓN DEL TEOREMA DEL SENO A PARTIR DE LA EXPLORACIÓN DE UN AMBIENTE DE GEOMETRÍA DINÁMICA

FORMALIZATION OF THE SINE THEOREM FROM THE EXPLORATION OF A DYNAMIC GEOMETRY ENVIRONMENT

Publio Suárez Sotomonte[1]
Carlos Alberto Joya Cetina[2]

Recepción: 15/07/2019
Aceptación: 30/10/2019
Artículo de investigación

Resumen

Este artículo se presentan resultados de un estudio realizado con estudiantes de educación media de un colegio de la ciudad de Tunja, con edades comprendidas entre 14 y 17 años. La investigación está centrada en analizar de qué manera los estudiantes conjeturan y formalizan nociones y propiedades sobre objetos geométricos relativos al triángulo y la generalización de leyes matemáticas como el teorema del seno, a partir de la exploración de un ambiente de geometría dinámica diseñado en el programa GeoGebra. Se aborda la temática correspondiente a la resolución de triángulos, analizando el caso particular en que se

1 Doctor en Ciencias de la Educación, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia - Tunja - Boyacá. Profesor Escuela de Matemáticas y Estadística Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia – Tunja – Boyacá. Profesor catedrático Universidad Santo Tomás, Tunja. Grupo de Investigación Pirámide en Educación Matemática, E-mail: Psuarez2002@hotmail.com.

2 Magister en Educación Matemática, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia – Tunja – Boyacá. Profesor de Matemáticas de la Institución Educativa San José de la Florida, Petaquita, Boyacá, E-mail: carlosalberto.joya@uptc.edu.co

ISSN: 2619-5658

conocen las longitudes de dos (2) lados del triángulo y la medida del ángulo opuesto, a alguno de estos. La metodología se contextualiza bajo un paradigma cualitativo, de tipo descriptivo – interpretativo. Para el aprendizaje en el aula se adopta el aprendizaje heurístico (Bruner, 1966) y en su análisis el enfoque cognitivo, inherente a las maneras de ver en geometría propuestas por Duval (2016). Se resalta que la experimentación heurística en un ambiente virtual de geometría dinámica, facilitó a los estudiantes los procesos de exploración y conjeturación respecto a las propiedades de objetos geométricos relativos al triángulo, así como una mejor visualización de las posibles soluciones en la resolución de triángulos.

Palabras clave: triángulo, conjeturación, formalización**,** ambiente de geometría dinámica, aprendizaje por descubrimiento.

Abstract

In this article, the partial results of an in process study are presented. The participants media education students from a school in Tunja with ages between 14 and 17 years old. The aim is to analyze the way how students surmise and formalize notions and properties about geometric objects concerning the triangle and also about the generalization of mathematical rules such as the sine theorem as of the exploration of and environment of dynamic geometry designed in the GeoGebra software. The resolution of triangle is addressed, analyzing specifically how the length of two triangle's sides as well as the measure of the opposite angle of any of these are known. The research is based on the descriptive-interpretative qualitative approach, taking into account the based on the learning by discovering methodology (Bruner, 1966) and the ways of seeing in geometry proposed by Duval (2016). It is highlighted that the heuristic experimentation in the dynamic geometry environment, facilitated to the students the processes of exploration and conjecture regarding the properties of geometric objects relative to the triangle, as well as a better visualization of the possible solutions in the resolution of triangles.

Key words: triangle, surmising, formalization, dynamic geometric environment, learning by discovering

Introducción

Actualmente la geometría es área compleja (Steen, 1999) y su aprendizaje implica abordar nuevas tendencias plasmadas en los esfuerzos de educadores e investigadores de la educación matemática; su tematización como contenido escolar se desarrolla en la educación básica y media, aunque no de una manera intensa. Por tal motivo, es importante que en el diseño de actividades y situaciones de aprendizaje de objetos geométricos se incorpore el uso de mediaciones que estimulen el trabajo de los estudiantes. Tal es el caso de los programas de geometría dinámica, los cuales han ganado importancia en los últimos años, ya que permiten el diseño de ambientes de aprendizaje que contribuyen en el alcance de objetivos propuestos mediante el desarrollo de tareas geométricas creativas que propicien aprendizajes más sólidos.

En este sentido, el diseño y aplicación de ambientes de geometría dinámica posibilita a los estudiantes una mejor exploración y visualización de objetos geométricos, permitiéndoles la experimentación con las propiedades de estos objetos de forma dinámica, complementando de esta manera el uso de materiales analógicos en las construcciones con regla y compás, que a su vez son de gran importancia, pues ponen en juego el desarrollo del pensamiento espacial (Vasco, 2017) y conjeturación de los estudiantes al realizar dichas actividades geométricas.

Es así como en el aprendizaje de la geometría es importante que los estudiantes se involucren en la experimentación con distintos sistemas de representación (Duval, 1999 y 2016), por medio de los cuales puedan clarificar de mejor manera los diferentes objetos geométricos. Los ambientes de geometría dinámica son mediaciones que permiten visualizar y reconocer figuras bidimensionales de forma interactiva, ya que permiten ampliar el dominio de los dibujos con herramientas de arrastre, rotación, traslación, entre muchas otras. Partiendo de los significados personales de los estudiantes, la utilización de estas herramientas en el desarrollo de tareas geométricas específicas, les permite llegar a una institucionalización de significados, para lo cual es clave el rol del docente al diseñar y proponer actividades adecuadas que ayuden a consolidar aprendizajes.

Bajo estas consideraciones, en el desarrollo de esta investigación, se adoptan enfoques de aprendizaje por descubrimiento (Bruner, 1966), ya que se busca que los estudiantes puedan generar conocimiento por sí mismos, sobre el triángulo y sus propiedades, a partir de la exploración de un ambiente de geometría dinámica, diseñado en el software GeoGebra. En este ambiente virtual se proponen actividades que desarrollen el proceso de conjeturación (Mason, 1989) sobre nociones y propiedades del triángulo, con miras a la formalización del teorema del seno, mediante el desarrollo de una tarea referente a la resolución de triángulos.

La motivación de la investigación, surge a partir de la dificultad mostrada por algunos estudiantes al momento de estudiar los casos de resolución de triángulos:

> No consideraban las medidas dadas para la construcción de triángulos, sino que realizaban representaciones gráficas sin tener en cuenta dichas medidas, ya que no era usual en ellos utilizar regla, compás y transportador para trazar los lados y ángulos del triángulo con las medidas dadas.
>
> no era natural para ellos identificar las posibilidades que se tenían al momento de construir el triángulo con las medidas dadas. Es decir, no identificaban fácilmente cuándo podía tenerse dos soluciones, única solución o ninguna solución.

A partir de estas dificultades detectadas previamente, surgió la necesidad por diseñar, aplicar y evaluar una secuencia que ayudara a mitigar la problemática evidenciada, y del mismo modo, activaran los procesos de exploración y conjeturación sobre nociones y propiedades del triángulo, con miras a la formalización del teorema del seno.

Marco teórico

La geometría como asignatura del currículo de formación básica es de gran importancia, ya que permite a los estudiantes desarrollar el pensamiento espacial, mediante las diferentes estrategias clásicas y procesos innovadores. Para esto, es importante el diseño de actividades abiertas o blandas (Laborde; 1998) que involucren diversas tareas geométricas que permitan a los estudiantes generar nuevo conocimiento a partir del trabajo con las representaciones semióticas (Duval, 1999). Para Bruner (1969, citado por Guillar, 2009), en el aprendizaje por descubrimiento, “el instructor debe motivar a los estudiantes para que sean ellos mismos los que descubran relaciones entre conceptos y construyan conocimientos” (p. 238).

El descubrimiento de relaciones entre nociones y propiedades de objetos geométricos puede propiciarse mediante el uso de ambientes de geometría dinámica en los que se involucre el desarrollo de diversas tareas que permitan la exploración y experimentación con las propiedades de dichos objetos, para lo cual el uso de estas herramientas virtuales es clave, ya que pueden contribuir en gran medida a mejorar el proceso de aprendizaje de la geometría plana. Acorde con esta idea, Correa & Pablos (2009) afirman:

> El uso de la tecnología introduce nuevas formas de enseñanza y aprendizaje que implican cambios en qué aprender y en lo que hacen los estudiantes y profesores dentro y fuera de las aulas. Las TIC's se encuentran en el centro de las competencias y habilidades necesarias para asegurar el aprendizaje a lo largo de la vida. La introducción de las TIC's en el contexto educativo ha dado un nuevo impulso a la pedagogía, estimulando al sistema escolar en la búsqueda de nuevos caminos para aprender (p. 134).

Cabe destacar que el uso las herramientas virtuales en la clase de geometría llama la atención de los estudiantes, en la medida en que estas promueven su creatividad y genera en ellos mayor interés por la exploración de objetos geométricos y de sus propiedades. En este sentido, la incorporación de las TIC en el aula como mediadoras en el proceso de aprendizaje lleva a valorar y reflexionar sobre su eficacia en la enseñanza, y ante esto, el docente debe proponer a los estudiantes diferentes actividades que propicien la consolidación de nuevos aprendizajes (Fandos, Jiménez & González, 2002).

Esto ha llevado a que en los últimos años haya sido de gran importancia y acogida el uso de software de geometría dinámica como mediaciones para explorar con representaciones en el aprendizaje de la geometría. En el caso particular de GeoGebra al ser un programa de libre acceso crea mayores posibilidades de utilización en el aula. En este sentido Ruiz (2013), comenta:

> Sin duda, la utilización de software específico como acompañamiento en la construcción del aprendizaje matemático de los estudiantes, es una de las grandes potencialidades de las TIC en el aula de Matemáticas. Por otro lado, la utilización del software libre se consolida cada vez más como la alternativa más idónea para el uso de las TIC en el ámbito educativo (p. 21).

Al respecto del papel de los ambientes virtuales de aprendizaje con geometría dinámica, Advíncula (2018) comenta que "[…] todo docente debe promover el desarrollo del pensamiento geométrico en sus estudiantes y en este sentido el *GeoGebra* es una herramienta muy útil pues permite explorar; descubrir; elaborar, refutar y verificar conjeturas; encontrar contraejemplos; comprobar propiedades y realizar generalizaciones" (p. 1940).

Sobre la exploración de geometría elemental en el aula, Camargo (2010) afirma que esta "es fuente de significados de ideas susceptibles de organización en cadenas deductivas, generalmente se lleva a cabo sobre figuras dibujadas en papel y lápiz, construidas con instrumentos de trazo o realizadas mediante un programa informático de geometría dinámica" (p. 50).

Contextualizados en el enfoque semiótico cognitivo para la comprensión y significado en matemáticas, en cuanto a las maneras de ver en geometría, Duval (2016) propone cuatro entradas clásicas a la geometría: el botánico, el agrimensor geómetra, el constructor y el inventor artesano. Estas se evidencian al abordar las tareas geométricas por parte de los estudiantes a partir de la exploración que ellos hacen en el ambiente de geometría dinámica propuesto (p. 13).

Metodología

Para el desarrollo de la investigación se tomó como unidad de análisis un grupo de estudiantes de grado Décimo de un colegio de la ciudad de Tunja, con edades comprendidas entre 14 y 17 años. La recolección de información se hizo a través de cuestionarios validados con preguntas abiertas y mediante grabaciones de audio y video. Se tuvo en cuenta un enfoque cualitativo de tipo descriptivo – interpretativo, con el objetivo de describir y analizar de qué manera los estudiantes conjeturan y formalizan nociones y propiedades relativas al triángulo en geometría plana. Para Fiorentini & Lorenzato (2010), en una investigación descriptiva, "el investigador desea describir o caracterizar con detalles una situación, un fenómeno o un problema" (p. 43).

En la primera etapa de investigación se trabajó una sesión de dos horas, sobre actividades que contemplan la resolución triángulos, a partir de datos conocidos de sus elementos. Previamente se había trabajado en algunas sesiones, lo relacionado con la noción de triángulo y su clasificación de acuerdo a la medida de sus lados y ángulos.

En la segunda etapa se implementó, en una sesión de dos horas, el ambiente de geometría dinámica elaborado en el Programa GeoGebra, relacionado con la resolución de triángulos. Allí, los estudiantes trabajaron de forma individual, explorando dicho ambiente y contestando de forma escrita cada una de las preguntas planteadas y las que ellos se formularon en la dinámica de trabajo.

En la tercera etapa, se socializaron colectivamente las respuestas dadas por los estudiantes en la aplicación del ambiente de geometría dinámica, en la que el docente actuó como asesor en los procesos de conjeturación y generalización de las propiedades del triángulo, con miras hacia una posible formalización del teorema del seno, argumentando los casos específicos en los que es posible su utilización.

Finalmente, se hizo un análisis de los resultados encontrados en la experimentación del ambiente de geometría dinámica y de la socialización hecha, con el fin de presentar un análisis descriptivo sobre la manera como los estudiantes conjeturan y formalizan nociones y propiedades de los objetos geométricos estudiados.

Resultados

Se presenta a continuación un análisis de resultados parciales obtenidos en las etapas 1 y 2, mediante el desarrollo de las tareas matemáticas propuestas a los estudiantes en diferentes sesiones de clase.

Etapa 1. *Construcción de triángulos con regla, graduador y compás, a partir de algunas medidas dadas y posterior resolución de cada uno de estos.*

Se trabajó una sesión de clase con una duración de dos horas, sobre los casos que se pueden tener al momento de resolver triángulos, a partir de medidas conocidas de sus elementos. Se realizaron construcciones de triángulos, conocidas las longitudes de dos de sus lados y la medida del ángulo opuesto a alguno de estos, utilizando regla, graduador y compás. Aunque los estudiantes presentaron dificultad para identificar en qué casos podía tenerse la posibilidad de obtener solución única, dos soluciones o ninguna solución, a medida que iban realizando las construcciones respectivas de acuerdo a las medidas dadas, pudieron determinar con mayor propiedad las posibilidades en cada caso. Posteriormente, se pedía hallar de forma analítica las medidas de los otros dos ángulos y del lado faltante usando propiedades del triángulo ya vistas.

En cuanto a la actividad y tarea matemática, Ponte (2004), comenta que "principalmente, los alumnos obtienen el aprendizaje a partir de los factores clave: la actividad que realizan y la reflexión que efectúan al respecto", y en este sentido, una tarea es el objetivo de dicha actividad (p. 2).

De acuerdo a esta tipificación de las tareas matemáticas, en este caso se propuso a los estudiantes una tarea tipo ejercicio, de duración corta y en el contexto de la matemática elemental, como se muestra en la tabla 1. Previamente, los estudiantes habían tenido experiencia en la realización de construcciones con regla y compás, particularmente de triángulos según su clasificación por la medida de sus lados y de sus ángulos.

Tabla 1

Tarea matemática sobre construcción de triángulos.

Construcción y solución analítica de triángulos a partir de medidas dadas.
Construir cada uno de los triángulos de acuerdo a las medidas dadas de los lados a *y* b *y del ángulo* α *opuesto al lado* a. *Luego hallar las medidas de los otros dos ángulos y del lado faltante.* 1. $a = 5\ cm$, $b = 8\ cm$, $\alpha = 25°$ 2. $a = 7\ cm$, $b = 6\ cm$, $\alpha = 60°$ 3. $a = 4\ cm$, $b = 8\ cm$, $\alpha = 50°$

Elaboración propia.

Luego que los estudiantes realizaron la construcción de cada uno de los triángulos, se pidió que identificaran cuantas soluciones existían en cada caso y que resultados podía establecer al resolver esta tarea propuesta.

Para el primer caso, en donde se tiene dos posibles soluciones, la mayoría de estudiantes no pudieron identificar fácilmente como podría hallarse la segunda solución. Sin embargo, se les pidió que dibujaran la segunda solución con ayuda de un compás, para lo cual hicieron el respectivo trazo para generar el segundo triángulo posible, guardando las medidas dadas inicialmente. En este punto, algunos estudiantes presentaron dificultad al momento de solucionar de forma analítica el segundo triángulo dibujado. Evidentemente, los dos triángulos posibles de dibujar en el primer caso, son de diferente área, y aunque para algunos estudiantes no había claridad del cómo podría dibujarse el segundo triángulo, surgieron algunas preguntas: ¿puede iniciarse la solución por cualquiera de los dos triángulos? A la cual varios estudiantes contestaron que, si era posible empezar por el de menor área y luego el de mayor área, o de viceversa, como la mayoría de ellos había hecho en este caso.

Al solucionar el segundo problema planteado, se inició la construcción del respectivo triángulo, surgiendo la pregunta inmediata: ¿profesor cómo se construiría aquí el otro triángulo? Ante esto se indicó que intentaran construirlo para luego analizar las posibilidades existentes. Posteriormente, algunos estudiantes contestaron que no se podía encontrar un segundo triángulo, luego de intentar varias veces la construcción del mismo.

Para el tercer caso, se pidió a los estudiantes hacer la construcción del triángulo pedido. Ellos intentaron construirlo de acuerdo al procedimiento usado en los dos casos anteriores, pero se hizo evidente un conflicto ya que no pudieron dibujarlo. Se les formuló la pregunta: ¿Qué puede decirse en este caso? a lo que la mayor parte de los estudiantes respondieron que no era posible la construcción del triángulo con las medidas dadas. Finalmente, se les planteó responder los siguientes interrogantes: ¿Qué sucede cuando el lado a es menor que el lado b? ¿Qué pasa si el lado a es mayor que el lado b? ¿Qué sucede cuando los dos lados son iguales?; ante los cuales no surgieron respuestas esperadas, aun cuando la mayor parte de estudiantes pudo construir cada uno de los triángulos pedidos.

Con base en este análisis, se consolidó la planeación de una tarea matemática que permitiera a los estudiantes la exploración dinámica del triángulo y sus propiedades y del mismo modo potenciara el proceso de conjeturación de nociones y propiedades de dichos objetos, con miras a la formalización del teorema del seno.

Etapa 2. Experimentación con el ambiente de geometría dinámica.

Acorde con el planteamiento de Ponte (2004), se propuso a los estudiantes una tarea de exploración, de duración media y contextualizada en las matemáticas elementales. Para esto, se facilitó a cada uno de ellos un ambiente de geometría dinámica, el cual contenía preguntas abiertas que los estudiantes debían responder de manera individual a partir de la exploración y visualización de objetos geométricos en el ambiente dado. Mediante las tres primeras preguntas, se buscaba que los estudiantes identificaran nociones y propiedades relativas al triángulo en geometría plana y a su clasificación. La siguientes cinco preguntas estaban encaminadas a la formulación y validación de conjeturas sobre la noción y propiedades del triángulo, con miras hacia una posible formalización del teorema del seno.

Se exploró en el ambiente de geometría dinámica diseñado en el programa GeoGebra, denominado *Animación triángulos.* Dicho ambiente estaba centrado en la resolución de triángulos, enfatizando el caso particular en el que se conocen las longitudes de dos lados del triángulo y la medida del ángulo opuesto a alguno de estos. Allí, los estudiantes trabajaron de forma individual, explorando dicho ambiente y contestando de forma escrita cada una de las preguntas planteadas. A continuación, se muestra una imagen tomada de la pantalla principal del programa GeoGebra con el ambiente de geometría dinámica propuesto (figura 1), y de las preguntas orientadoras que contenía el mismo (tabla 2).

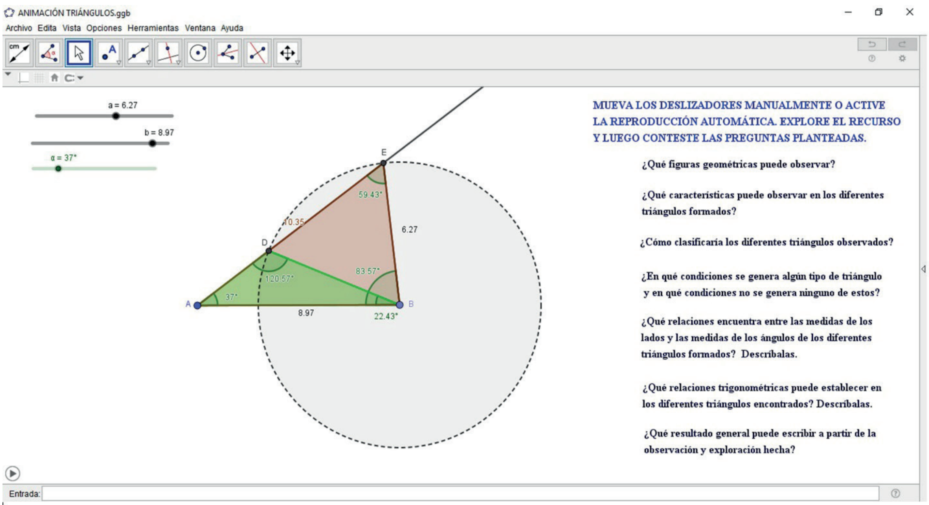

Figura 1. Ambiente de geometría dinámica diseñado y evaluado. Elaboración propia.

Tabla 2

Tarea matemática basada en la exploración del ambiente de geometría dinámica.

Preguntas orientadoras contenidas en el ambiente de geometría dinámica.
1. ¿Qué figuras geométricas puede observar?
2. ¿Qué características puede observar en los diferentes triángulos formados?
3. ¿Cómo clasificaría los diferentes triángulos observados?
4. ¿En qué condiciones se genera algún tipo de triángulo y en qué condiciones no se genera ninguno de estos?
5. ¿Qué relaciones encuentra entre las medidas de los lados y las medidas de los ángulos de los diferentes triángulos formados? Descríbalas.
6. ¿Qué relaciones trigonométricas puede establecer en los diferentes triángulos encontrados? Descríbalas.
7. ¿Qué resultado general puede escribir a partir de la exploración y observación hecha?
8. ¿Qué situaciones de su cotidianidad podría resolver utilizando la temática de este recurso de GeoGebra? Describa el procedimiento que usaría para resolver cada una de estas.

Elaboración propia.

Mediante el planteamiento de las preguntas y la exploración hecha en el ambiente de geometría dinámica, se pretendía que los estudiantes pudieran hacer conjeturas sobre nociones y propiedades del triángulo en geometría plana, con miras a la generalización del teorema del seno. A continuación, se presenta la transcripción de algunas respuestas dadas por los estudiantes a las diferentes preguntas planteadas.

Pregunta 4. ¿En qué condiciones se genera algún tipo de triángulo y en qué condiciones no se genera ninguno de estos?

> ***E4.*** *No se forma cuando solo un ángulo o dos forman 180º.*

E5. *Un triángulo se puede generar dependiendo tanto como de la medición de los ángulos, donde el ángulo no puede medir ni 0º ni 180º.*

E7. *Los triángulos se generan en el momento en que sus tres lados se unen y la suma de sus ángulos internos es igual a 180º.*

Los triángulos no se generan debido a que los ángulos son muy grandes y no permite la intersección entre sus lados, sin embrago considero que, si expandiera al infinito los lados desunidos, en algún momento se deberían unir.

E10. *En la condición cuando el lado a es menor que el lado b, no se genera un triángulo, y también cuando el lado c es mayor que el lado a.*

E22. *Que, si se modifica alguno de sus ángulos, cambian sus lados.*

Bajo la exploración en el ambiente dado, en cuanto a las longitudes de los lados y medida del ángulo, algunos estudiantes presentaron casos particulares en los que no era posible formar un triángulo. En la figura 2 se presenta el caso del estudiante E18.

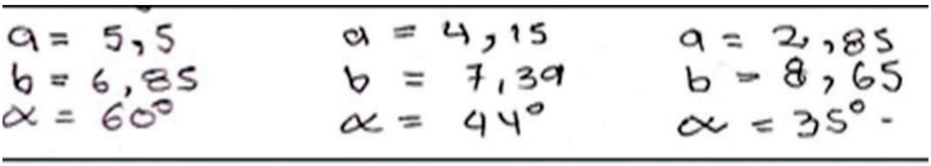

Figura 2. Ejemplo de casos particulares en los que no hay solución del triángulo. Elaboración propia.

Pregunta 5. ¿Qué relaciones encuentra entre las medidas de los lados y las medidas de los ángulos de los diferentes triángulos formados? Descríbalas.

E1. *Que depende, se puede saber y conocer los ángulos de los demás vértices, y si tenemos al menos dos lados podemos hallar y conocer el lado que falta.*

E4. *Las relaciones que pude encontrar son:*

Tener un ángulo de 180º, se van a unir los 3 lados, pero no se forman ningún triángulo.

Al cambiar el dato del ángulo que está en el vértice A, no cambia el lado opuesto a este vértice.

E6. *Cuando sus lados son iguales, sus ángulos también lo son.*

E7. *Cuando el ángulo disminuye, su lado opuesto también. Sin embargo, también se pueden formar 2 triángulos a la vez, dependiendo de la amplitud de los ángulos internos.*

E9. *Si los lados aumentan los ángulos disminuyen y viceversa.*

E10. *Que al formar un ángulo de 180º se unen los lados, pero no se forma un triángulo. Y al tener un ángulo de más de 40º no se forma por el lado b, no se puede formar un triángulo.*

E14. *La relación que puedo concluir es que el ángulo no puede ser de 0º y tampoco de 180º para formar un triángulo y los lados se pueden concluir mediante el ángulo.*

E21. *Pueden llegar a variar dependiendo de la clase de triángulos que sean, los lados disminuyen y los ángulos aumentan.*

E23. *Cuando dos lados del triángulo son iguales, sus ángulos lo son de la misma manera.*

Cuando un lado (a y b) se mueve, el ángulo α *sigue teniendo su mismo valor.*

Cuando el ángulo α *cambia su valor, entonces dos de sus lados cambian.*

Cuando el lado a es mayor al lado que no se pude mover, se forma un segundo triángulo con la medida igual en el lado a y b.

E30. *Si se modifica algún ángulo, el lado que corresponde a ese ángulo también se modifica.*

Pregunta 6. *¿Qué relaciones trigonométricas puede establecer en los diferentes triángulos encontrados? Descríbalas.*

E7. *En los distintos triángulos formados se pueden establecer las relaciones trigonométricas conocidas hasta el momento, tales como:*

$$\mathrm{Sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa.}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \qquad \cot(\alpha) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto.}}$$

$$\sec(\alpha) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} \qquad \csc(\alpha) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto.}}$$

Figura 3. Relaciones trigonométricas en los triángulos encontrados.
Fuente: elaboración propia.

E9. *Si se forma un triángulo rectángulo se le podrían sacar todas las relaciones trigonométricas: seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente.*

E15. *Cuando se forma un triángulo isósceles los ángulos son los mismos.*

Pregunta 7. ¿Qué resultado general puede escribir a partir de la exploración y observación hecha?

E2. *Se puede decir que el ángulo y los lados que forman un triángulo pueden variar.*

En las transcripciones anteriores se evidencian algunas respuestas dadas por los estudiantes a las diferentes preguntas planteadas, en las cuales se detecta que la mayoría de ellos formuló conjeturas sobre propiedades del triángulo. A continuación, se destacan y analizan algunos aspectos en el proceso de conjeturación de los estudiantes.

- Pudieron determinar cuándo se podía generar o no un triángulo a partir de la observación y exploración de las medidas de ángulos y longitudes de los lados dadas en el ambiente, y comparando con aquellas que se generaban a partir del movimiento de los deslizadores, en donde iban resultando diferentes tipos de triángulos o ninguno de estos.

- Los estudiantes determinaron a partir de la comparación entre las longitudes de los lados y medidas de los ángulos, algunos ejemplos de condiciones en las que no se puede generar ningún triángulo.

- Sobre las relaciones entre lados y ángulos de los diferentes triángulos formados, los estudiantes pudieron establecer conjeturas respecto a que el cambio en la medida de los ángulos de un triángulo, implica cambio en los lados de dicho triángulo. Algunas de estas se consideran erróneas en la formulación, ya que no son válidas. Sin embargo, algunas lo son parcialmente, como en el caso de afirmar que en un triángulo que tiene lados iguales, implica que sus ángulos también son iguales.

- Acerca de las relaciones trigonométricas, pocos estudiantes hicieron afirmaciones erróneas, pues afirman que para cualquier triángulo se pueden aplicar relaciones trigonométricas que solo tienen validez en los triángulos rectángulos.
- Algunos estudiantes no pudieron establecer resultados generales que pudieran llevar a la formalización de teorema del seno. Ellos pudieron identificar de acuerdo a la exploración hecha de los diferentes triángulos, las condiciones para los casos en que se pueden tener dos soluciones, única solución o ninguna solución, pero en algunos casos se evidenció la formulación de conjeturas sobre la formalización de dicho teorema.

Finalmente, se pidió a los estudiantes trabajar de manera grupal en la grabación de un audio socializando sus respuestas a la pegunta 7, contenida en el ambiente virtual: ¿Qué resultado general puede escribir a partir de la exploración y observación hecha? Aquí los estudiantes hicieron algunas apreciaciones, las cuales se presentan en la tabla 3.

Tabla 3

Socialización grupal: proceso de conjeturación por parte de los estudiantes.

Socialización de respuestas a la pregunta 7, mediante grabación de audio.
Grupos 1. *Al cambiar un lado, va a cambiar un ángulo y otros no.*
Grupos 2. *Cuando la circunferencia es muy grande o muy pequeña, los catetos no rozan con ella.* *Cuando los ángulos aumentan el triángulo disminuye.*
Grupos 3. *A partir de los deslizadores podemos mirar la variación de sus medidas tanto en sus lados y ángulos.* *Se puede observar la aplicación de algunos temas vistos en clase. Es el caso 2, donde se encuentra lado, lado y ángulo, y de esto se pueden obtener dos respuestas.*
Grupos 4. *Hay distintos tipos de triángulos que se pueden sacar y observar con ángulos distintos.* *Existen infinidad de triángulos con diferentes medidas, y cada uno tiene diferencias.*
Grupos 5. *Cuando un ángulo, en este caso alfa (α), aumenta en grados, se hará más grande, pero cuando se aumenta por más de 180° este desaparecerá.*

Elaboración propia.

Etapa 3. Socialización grupal.

Para esta sesión se programó una socialización grupal, mediante la cual se pretendía que los estudiantes respondieran cada una de las preguntas planteadas en el ambiente de geometría dinámica, el cual se proyectó en el aula de clase, de tal manera que todos pudieran hacer observación del mismo. Se buscaba que ellos pudieran conjeturar acerca de las propiedades del triángulo, con el fin de encaminarlos a una posible formalización del teorema del seno usado en la resolución de triángulos y argumentando los casos específicos en los que es posible su aplicación.

En este caso, los estudiantes podían responder de manera libre y espontánea a cada una de las preguntas planteadas. Aunque no se logró que la totalidad de ellos dieran sus aportes o que argumentaran sus ideas respecto a la observación hecha del ambiente, varios de ellos lo hicieron, generando de esta manera algunos aportes importantes.

Mediante esta socialización grupal, los estudiantes pudieron hacer afirmaciones y formular conjeturas en las que se evidenciaron argumentos válidos, hechos a partir de la exploración y observación que cada uno de ellos hizo del ambiente. Con respecto a la argumentación autores como Dual (1991), Bartolina et al; (1997), (citados por Camargo, 2010), comentan:

Durante la exploración, formulación y socialización de una conjetura (en el curso de la resolución de un problema), el término 'argumentar' se refiere a esgrimir razones o puntos de vista en pro o en contra de una afirmación con el objeto de dar cuenta de la plausibilidad de un enunciado, establecer un cierto grado de certeza de éste y postularlo como candidato para hacer una demostración. Las razones o puntos de vista pueden ser manifestaciones verbales, visuales, numéricas o de cualquier índole. Una argumentación consiste de uno o más argumentos conectados coherentemente, pero no necesariamente deductivamente (p. 52).

La orientación guiada por medio de preguntas propuestas, permitió a los estudiantes formular y validar conjeturas bajo argumentos dados por algunos y cuestionados por otros, debido a que afirmaban que los primeros estaban diciendo algo equivocado. A continuación, se describe el caso en el que un estudiante hace una afirmación que es considerada errónea por una de sus compañeras, quien inmediatamente replantea la idea inicial, llevándola a la forma como ella considera que es adecuada, *"si la medida de los ángulos del triángulo aumentan, los lados también";* ante esto, una de sus compañeras responde que no necesariamente es así, y para tratar de justificar su argumento, afirma: *"si la medida de algunos de los ángulos aumenta, el lado adyacente a este disminuye".*

El accionar de los estudiantes ante situaciones como la descrita anteriormente, evidencia el hecho de que ellos pueden consolidar aprendizajes a partir de los aportes brindados por sus compañeros. En este sentido, el proceso de formulación y validación de conjeturas, generado a partir de la exploración y observación, les permite establecer afirmaciones válidas respecto a las propiedades de diferentes objetos geométricos, con ayuda de un ambiente virtual en el que dichos objetos no se estudian de forma estática, sino dinámica.

Finalizadas las tres sesiones usadas para el desarrollo de la secuencia, puede decirse que, si bien los estudiantes no llegaron a formular conjeturas que implicaran la formalización del teorema del seno, la mayoría de ellos pudieron establecer algunas propiedades del triángulo en geometría plana y del mismo modo, identificaron características que hacen posible la construcción de triángulos a partir de condiciones dadas.

Conclusiones

La experimentación heurística del ambiente de geometría dinámica permitió a los estudiantes una mejor exploración y trabajo con representaciones semióticas y con las propiedades de objetos geométricos relativos al triángulo. Facilitó la visualización de las posibles soluciones en la resolución de triángulos, particularmente el caso en que se conocen las medidas de dos de los lados y del ángulo opuesto a alguno de estos, para lo cual las construcciones con regla y compás limitan la exploración dinámica.

El rol de docente investigador permite ser más observador de la realidad en el aula, de los intereses y necesidades de los estudiantes; así puede planear y desarrollar actividades que permitan a los estudiantes a lograr objetivos precisos, los cuales siempre deben estar encaminados a que generen constantemente nuevos conocimientos. Particularmente en el aprendizaje de la geometría con mediación de ambientes virtuales de aprendizaje les permitió trabajar con diversos sistemas semióticos de representación, claves en el desarrollo del pensamiento espacial, a través de tareas abiertas que posibiliten los procesos de exploración, conjeturación y generalización de nociones y propiedades de objetos geométricos.

El mejoramiento de la práctica docente está sujeto indiscutiblemente a procesos de investigación, en los que se puedan identificar problemáticas reales, para luego desarrollar estrategias que permitan solucionarlas. En este sentido, la educación matemática como campo investigativo, ha logrado consolidar elementos a través de diferentes perspectivas teóricas, los cuales permiten desarrollar procesos de investigación importantes para lograr mejores aprendizajes en los estudiantes.

Referencias Bibliográficas

Advíncula, E. (2018). Conjeturas geométricas y GeoGebra. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 31 (2), 1939-1944.

Camargo, L. (2010). Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria (Doctoral disertación, Universidad de Valencia).

Correa, J. & de Pablos, J. (2009). Nuevas tecnologías e innovación educativa. Revista de Psico Didáctica, 14(1), 133-145.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2016). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. En R. Duval & A. Saénz (Eds). Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas (pp. 13-60), Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Fandos, M., Jiménez, J. & González, A. (2002). Estrategias didácticas en el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación. Acción Pedagógica 11 (1), 28-39.

Fiorentini D. & Lorenzato S. (2010). Investigación en educación matemática: recorridos históricos y metodológicos. Traducción al español de Alfonso Jiménez Espinosa. Campinas, SP. Autores Asociados Ltda.

Guillar, M. (2009). Las ideas de Bruner: "de la revolución cognitiva" a la "revolución cultural". Educere, 13 (44), 235-241.

Laborde, C. (1998). Cabri Geometry: una nueva relación con la geometría. Grenoble: Universidad Joseph Fourier, IUFM.

Mason, J. Et alter (1989) Pensar matemáticamente. Barcelona: editorial Labor S. A.

Ponte, J. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. La actividad matemática en el aula, 25-34.

Ruiz, J., (2013). Las TIC en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Bogotá, Colombia: ediciones de la U.

Steen, L. (1999). La enseñanza agradable de las matemáticas. México: Limusa.

Vasco, C. (2017). Geometría activa y geometría de las transformaciones. Ted: Tecné, Episteme y Didaxis. 10.17227/ted.num2-5706.

Forma de citar este artículo: Suárez Sotomonte, P. & Joya Cetina, C. A. (2019) "Formalización del Teorema del Seno a partir de la Exploración de un Ambiente de Geometría Dinámica" *Revista Voces y Realidades Educativas* (4) pp. 79 - 98